Superpoderes Matemáticos para Concursos Militares

Volume 5C

2ª edição

COLÉGIO NAVAL 2002-2006

Renato Madeira

www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Concurso de Admissão ao Colégio Naval (CN) dos anos de 1984 a 2016, mais uma "faixa bônus" com 40 questões anteriores a 1984, detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto. Na parte C serão apresentadas as provas de 2002 a 2006, totalizando 100 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 35 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da Colégio Naval ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ); participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Mademática".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos professores que me inspiraram a trilhar esse caminho e à minha família pelo apoio, especialmente, aos meus pais, Cézar e Sueli, pela dedicação e amor.
Gostaria ainda de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante toda a elaboração dessa obra e a meu filho Daniel que eu espero seja um futuro leitor deste livro.

Renato Madeira

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!
Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2005/2006

1) Num triângulo ABC, $AB = AC$, o ponto D interno ao lado AC é determinado de modo que $DC = BC$. Se o ângulo ABD mede 12°, qual a medida, em graus, do ângulo BAC?
(A) 100
(B) 88
(C) 76
(D) 54
(E) 44

2)

	1	1	2
A	B	C	40
D	E	0	

O algoritmo acima foi utilizado para o cálculo do máximo divisor comum entre os números A e B. Logo, $A + B + C$ vale
(A) 400
(B) 300
(C) 200
(D) 180
(E) 160

3) Sejam os conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e X. Sabe-se que qualquer subconjunto de $A \cap B$ está contido em X, que por sua vez é subconjunto de $A \cup B$. Quantos são os possíveis conjuntos X?
(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

4) Três dos quatro lados de um quadrilátero circunscritível são iguais aos lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular circunscritos a um circulo de raio 6. Qual é a medida do quarto lado desse quadrilátero, sabendo-se que é o maior valor possível nas condições dadas?
(A) $16\sqrt{3} - 12$
(B) $12\sqrt{3} - 12$
(C) $8\sqrt{3} + 12$
(D) $12\sqrt{3} + 8$
(E) $16\sqrt{3} - 8$

5) Um círculo α de centro num ponto A e raio $2\sqrt{3}$ é tangente interior, num ponto B, a um círculo β de centro num ponto O e raio $6\sqrt{3}$. Se o raio OC é tangente a α num ponto D, a medida da área limitada pelo segmento DC e os menores arcos BC de β e BD de α é igual a

(A) $4\pi - 3\sqrt{3}$
(B) $5\pi - 4\sqrt{3}$
(C) $4\pi - 6\sqrt{3}$
(D) $5\pi - 6\sqrt{3}$
(E) $5\pi - 5\sqrt{3}$

6) As raízes do trinômio do 2° grau $y = ax^2 + bx + c$ são 1000 e 3000. Se quando x vale 2010, o valor numérico de y é 16, qual é o valor numérico de y, quando x vale 1990?

(A) 64
(B) 32
(C) 16
(D) 8
(E) 4

7) O número de diagonais de um polígono regular P inscrito em um círculo K é 170. Logo

(A) o número de lados de P é ímpar.
(B) P não tem diagonais passando pelo centro de K.
(C) o ângulo externo de P mede 36°.
(D) uma das diagonais de P é o lado do pentágono regular inscrito em K.
(E) o número de lados de P é múltiplo de 3.

8) Qual é o conjunto solução S da inequação: $[(x-1)\cdot(x-2)]^{-1} > [(x-2)\cdot(x-3)]^{-1}$?

(A) $S = \{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$
(B) $S = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$
(C) $S = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$
(D) $S = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$
(E) $S = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 3\}$

9) No algoritmo abaixo, tem-se a decomposição simultânea em fatores primos dos números a, b e c, onde x está substituindo todos os números que são diferentes de a, b, c e 1.

a, b, c	2
a, x, x	2
a, x, x	2
a, x, x	3
x, x, x	3
x, x, x	3
x, x, x	5
x, x, 1	7
1, 1, 1	

Analise as afirmativas abaixo:
I) a certamente é múltiplo de 36.
II) b certamente é múltiplo de 30.
III) c certamente é múltiplo de 35.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é falsa.
(B) Apenas a afirmativa II é falsa.
(C) Apenas a afirmativa III é falsa.
(D) Apenas as afirmativas II e III são falsas.
(E) As afirmativas I, II e III são falsas.

10) Um professor usa para medir comprimentos uma unidade denominada “nix”, definida como $1\text{ nix} = \sqrt{3}\text{ centímetros}$. Ele mediu na unidade nix as diagonais de um hexágono regular de lado 1 cm e encontrou para as menores x e para as maiores y. Pode-se concluir que x e y são, respectivamente,
(A) números racionais.
(B) números irracionais.
(C) um número inteiro e um número irracional.
(D) um número irracional e um número inteiro.
(E) um número racional não inteiro e um número irracional.

11) Observe o sistema linear S.

$$S:\begin{cases}2x+3y=7\\3x+2y=9\\ax+by=c\end{cases}$$

É correto afirmar, em relação aos parâmetros a, b e c, que
(A) quaisquer que sejam, S será possível e determinado.
(B) existem valores desses parâmetros que tornam S possível e determinado.
(C) quaisquer que sejam, S será possível e indeterminado.
(D) existem valores desses parâmetros que tornam S indeterminado.
(E) quaisquer que sejam, S será impossível.

12)

A	1	3	6	9
B	3	9	18	27
C	3	27	108	243
D	3	2	1	1/3

As linhas da tabela acima mostram a variação de quatro grandezas: A, B, C e D. observa-se, por exemplo, que quando a grandeza A vale 6 as grandezas B, C e D valem, respectivamente, 18, 108 e 1.
Com base nos dados apresentados, analise as afirmativas abaixo.
I − A grandeza A é diretamente proporcional a B.
II − A grandeza A é diretamente proporcional a C.
III − A grandeza A é inversamente proporcional a D.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

13) Um polígono convexo de n lados tem três dos seus ângulos iguais a 83^o, 137^o e 142^o. Qual é o menor valor de n para que nenhum dos outros ângulos desse polígono seja menor que 121^o?
(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 9
(E) 10

14) Uma máquina enche um depósito de cereais na razão de seis toneladas por hora. Num determinado dia, essa máquina com a tarefa de encher três depósitos de mesma capacidade encheu o primeiro normalmente, mas apresentou um defeito e encheu os outros dois na razão de três toneladas por hora. Em média, nesse dia quantas toneladas por hora trabalhou essa maquina?
(A) $3,2$
(B) $3,5$
(C) $3,6$
(D) $4,0$
(E) $4,5$

15) Em quantos meses, no mínimo, um capital aplicado segundo a taxa simples de $0,7\%$ ao mês produz um montante que supera o dobro do seu valor?
(A) 140
(B) 141
(C) 142
(D) 143
(E) 144

16) Simplificando-se a fração $\dfrac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}$, onde $a>b$, obtém-se

(A) a^2-b^2-2ab
(B) a^2-b^2+2ab
(C) a^2+b^2-2ab
(D) a^2+b^2+2ab
(E) a^2+b^2

17) Num determinado triângulo escaleno ABC, o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a $90º$. Sabe-se que $AB=c$, $AC=b$ e $BC=a$. Internamente ao segmento BC, determina-se o ponto P de modo que $BP=\dfrac{(c-b)(c+b)}{a}$. O perímetro do triângulo APC é dado pela expressão

(A) $\dfrac{2b(a+b)}{a}$
(B) $\dfrac{2c(a+b)}{a}$
(C) $\dfrac{2b(b+c)}{a}$
(D) $\dfrac{2c(b+c)}{a}$
(E) $\dfrac{2b(a+c)}{a}$

18) No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida x e a mediana BM tem a mesma medida y do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\dfrac{x}{y}$ é um valor compreendido entre:

(A) 0 e 1
(B) 1 e 2
(C) 2 e 3
(D) 3 e 4
(E) 4 e 5

19) Uma determinada conta a pagar de valor X vence no dia 30 de novembro, mas, se for paga até o dia 30 de setembro, tem 20% de desconto sobre X e, se for paga até o dia 31 de outubro, tem 10% de desconto sobre X. Alguém reservou o valor exato Y para pagar essa conta no dia 30 de setembro, no entanto esqueceu-se de fazê-lo e só efetuou esse pagamento no dia 31 de outubro. Qual a porcentagem a mais sobre Y que terá de pagar?
(A) 10%
(B) $12,5\%$
(C) $17,5\%$
(D) 20%
(E) 25%

20) Os números reais positivos a e b satisfazem a igualdade: $a\sqrt{\left(a^2+2b^2\right)}=b\sqrt{\left(9a^2-b^2\right)}$. Um valor possível para $\frac{a}{b}$ é

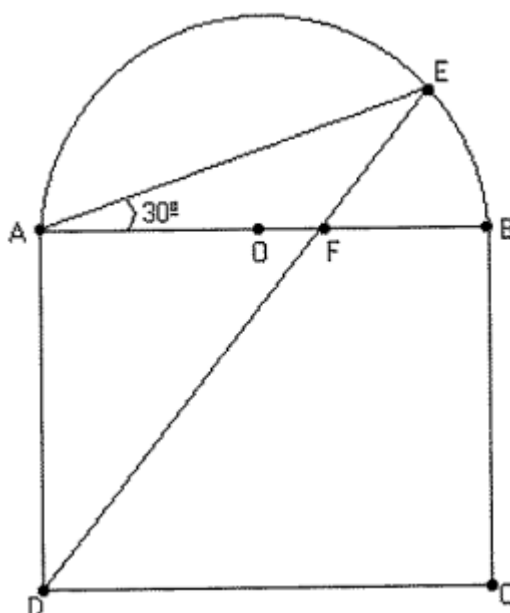
(A) $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$

(B) $\frac{5+\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2004/2005

1)

Na figura acima, $ABCD$ é um quadrado de área 104 e o ponto O é o centro do semicírculo de diâmetro AB. A área do triângulo AEF é dada por

(A) $2\left(3\sqrt{3}+3\right)$

(B) $6\left(4\sqrt{3}-3\right)$

(C) $5\left(4\sqrt{3}-6\right)$

(D) $3\left(4\sqrt{3}-3\right)$

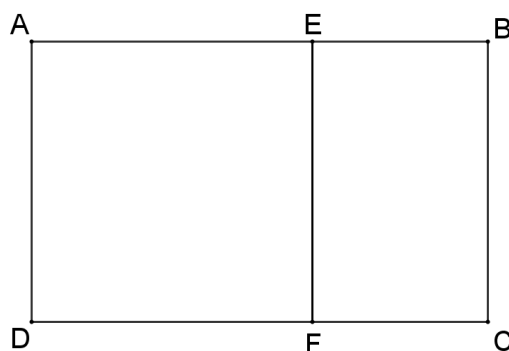
(E) $8\left(4\sqrt{3}-3\right)$

2) Um certo professor comentou com seus alunos que as dízimas periódicas podem ser representadas por frações em que o numerador e o denominador são números inteiros e, neste momento, o professor perguntou aos alunos o motivo pelo qual existe a parte periódica. Um dos alunos respondeu justificando corretamente, que em qualquer divisão de inteiros:
(A) o quociente é sempre um inteiro.
(B) o resto é sempre um inteiro.
(C) o dividendo é o quociente multiplicado pelo divisor, adicionado ao resto.
(D) os possíveis valores para o resto têm uma quantidade limitada de valores.
(E) que dá origem a uma dízima, os restos são menores que a metade do divisor.

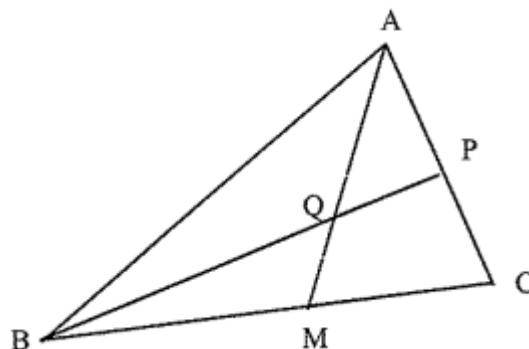
3) Um professor de matemática apresentou uma equação do $2°$ grau completa, com duas raízes reais positivas, e mandou calcular as médias: aritmética, geométrica, e harmônica entre essas raízes, sem determiná-las. Nessas condições:
(A) somente foi possível calcular a média aritmética.
(B) somente foi possível calcular as médias aritmética e geométrica.
(C) somente foi possível calcular as médias aritmética e harmônica.
(D) foi possível calcular as três médias pedidas.

(E) não foi possível calcular as três médias pedidas.

4) Sabendo-se que a equação $x^2(x^2+13)-6x(x^2+2)+4=0$ pode ser escrita como um produto de binômios do primeiro grau, a soma de duas das suas raízes reais distintas é igual a
(A) -3
(B) -2
(C) -1
(D) 2
(E) 3

5)

Um retângulo $ABCD$ de lado $AB=a$ e $BC=b$ $(a>b)$, é dividido, por um segmento EF num quadrado $AEFD$ e num retângulo $EBCF$, semelhante ao retângulo $ABCD$ conforme a figura acima. Nessas condições, a razão entre a e b é aproximadamente igual a:
(A) $1,62$
(B) $2,62$
(C) $3,62$
(D) $4,62$
(E) $5,62$

6) A interseção do conjunto solução, nos reais, da inequação $\frac{(x^2-2x+1)^2}{12x-4}\le 0$ com o conjunto $\{x\in\mathbb{R}\mid x<4\}$ é dada por:
(A) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<\frac{1}{3}\right\}$
(B) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\}$
(C) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<\frac{1}{3}\right\}\cup\{2\}$
(D) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<\frac{1}{3}\right\}\cup\{1\}$
(E) $\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$

7)

Na figura acima AM e BP são cevianas do triângulo ABC de área S. Sendo $AP = 2 \cdot PC$ e $AQ = 3 \cdot QM$, qual é o valor da área do triângulo determinado pelos pontos P, Q e M, em função de S?

(A) $\frac{S}{16}$

(B) $\frac{S}{18}$

(C) $\frac{S}{20}$

(D) $\frac{S}{21}$

(E) $\frac{S}{24}$

8) Considere o triângulo escaleno ABC e os pontos P e Q pertencentes ao plano de ABC e exteriores a esse triângulo.
Se: as medidas dos ângulos PAC e QBC são iguais; as medidas dos ângulos PCA e QCB são iguais; M é o ponto médio de AC; N é o ponto médio de BC; S_1 é a área do triangulo PAM; S_2 é a área do triangulo QBN; S_3 é a área do triangulo PMC; e S_4 é a área do triangulo QNC, analise as afirmativas:

I. S_1 está para S_4, assim como S_3 está para S_2.

II. S_1 está para S_2, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$.

III. S_1 está para S_3, assim como S_2 está para S_4.

Logo pode-se concluir, corretamente, que:
(A) apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(C) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(D) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

9) Uma máquina é capaz de fabricar, ligada durante um tempo inteiro de minutos T, 3^T peças, sendo que 20% delas são defeituosas. Para obter-se, no mínimo, 605 peças perfeitas essa máquina deverá funcionar quantos minutos?
(A) 4

(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

10) Um número natural N tem 2005 divisores positivos. O número de bases distintas da sua decomposição em fatores primos pode ser
(A) um
(B) cinco
(C) três
(D) quatro
(E) seis

11) (CN 2005) Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}$, no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado, e, assim sendo, procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta. Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples, concluiu, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi
(A) $3,00$
(B) $3,05$
(C) $3,15$
(D) $3,25$
(E) $3,35$

12) Se a, b, c e d são números reais não nulos tais que $ad^2+bc^2=0$. Pode-se afirmar que:
(A) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d};\ b+d\neq 0$
(B) $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d};\ c+d\neq 0$
(C) $\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c+d};\ c+d\neq 0$
(D) $\frac{c}{a}+\frac{b}{d}=\frac{b+c}{a+d};\ a+d\neq 0$
(E) $\frac{c}{b}+\frac{d}{a}=\frac{c+d}{a+b};\ a+d\neq 0$

13) Um número natural N deixa: resto 2 quando dividido por 3; resto 3 quando dividido por 7; e resto 19 quando dividido por 41. Qual é o resto da divisão do número $k=(N+1)\cdot(N+4)\cdot(N+22)$ por 861?
(A) 0
(B) 13
(C) 19
(D) 33
(E) 43

14) Uma herança P foi dividida por dois herdeiros, com idades, respectivamente, iguais a n e m, em partes proporcionais ao quadrado de suas idades. Qual foi a parte da herança recebida pelo herdeiro de idade n?

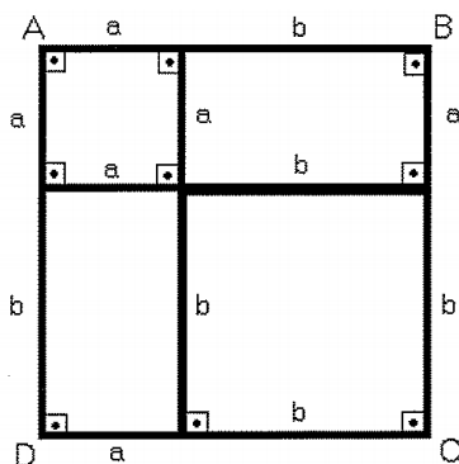
(A) $\frac{P^2n}{m^2+n^2}$

(B) $\frac{Pn^2}{m^2+n^2}$

(C) $\frac{P^2n^2}{m^2+n^2}$

(D) $\frac{Pn^2m}{m^2+n^2}$

(E) $\frac{P^2n^2m}{m^2+n^2}$

15)

Qual é o produto notável representado, geometricamente, na figura acima, na qual $ABCD$ é um retângulo?

(A) a^3+b^3

(B) $(a+b)^3$

(C) $(a+b)^2$

(D) $(a^2+b^2)^2$

(E) $(a+b)^4$

16) O valor numérico da expressão $120k^4+10k^2+8$, sendo $\underline{k}$ pertencente ao conjunto dos números naturais, é o quadrado de um numero natural para:

(A) somente um único valor de $\underline{k}$.

(B) somente dois valores de $\underline{k}$.

(C) somente valores de $\underline{k}$ múltiplos de 13.

(D) somente valores de $\underline{k}$ múltiplos de 18.

(E) nenhum valor de $\underline{k}$.

17) Considere os pontos A, B e C pertencentes ao gráfico do trinômio do segundo grau definido por $y = x^2 - 8x$. Se: a abscissa do ponto A é -4; B é o vértice; a abscissa do ponto C é 12; o segmento AB tem medida d_1; e o segmento BC tem medida d_2, pode-se afirmar que

(A) $d_1 + d_2 < 48$
(B) $48 < d_1 + d_2 < 64$
(C) $64 < d_1 + d_2 < 72$
(D) $72 < d_1 + d_2 < 128$
(E) $d_1 + d_2 > 128$

18) Dado um triângulo retângulo, seja $\underline{P}$ o ponto do plano do triângulo equidistante dos vértices. As distâncias de $\underline{P}$ aos catetos do triangulo são $\underline{K}$ e $\underline{L}$. O raio do círculo circunscrito ao triângulo é dado por:

(A) $\frac{K+L}{4}$
(B) $2K + L$
(C) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{4}$
(D) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{2}$
(E) $\sqrt{K^2+L^2}$

19) Dada a equação na variável real x: $7x - \frac{3}{x} = k$, pode-se concluir, em função do parâmetro real k, que essa equação:

(A) tem raízes reais só se k for um número positivo.
(B) tem raízes reais só se k for um número negativo.
(C) tem raízes reais para qualquer valor de k.
(D) tem raízes reais somente para dois valores de k.
(E) nunca terá raízes reais.

20) Sejam $L1$ e $L2$ duas circunferências fixas de raios diferentes, que se cortam em A e B. P é um ponto variável exterior às circunferências (no mesmo plano). De P traçam-se retas tangentes à $L1$ e $L2$, cujos pontos de contato são R e S. Se $PR = PS$, pode-se afirmar que P, A e B

(A) estão sempre alinhados.
(B) estão alinhados somente em duas posições.
(C) estão alinhados somente em três posições.
(D) estão alinhados somente em quatro posições.
(E) nunca estarão alinhados.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2003/2004

1) Analise as seguintes afirmativas sobre um sistema S se duas equações do primeiro grau com duas incógnitas x e y.
I. S sempre terá ao menos uma solução, se os seus termos independentes são iguais a zero.
II. Se a razão entre os coeficientes de x for igual à dos de y, S terá infinitas soluções.
III. Se a razão entre os coeficientes de x for diferente da dos de y, S terá apenas uma solução.
Assinale a alternativa correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

2) Quantas raízes reais tem a equação $\sqrt{x+20}=x$?
(A) Nenhuma.
(B) Uma.
(C) Duas, as quais são positivas.
(D) Duas, as quais são negativas.
(E) Duas, as quais têm sinais opostos.

3) Quantos são os pontos de um plano α que são equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC contido em α?
(A) Um.
(B) Dois.
(C) Três.
(D) Quatro.
(E) Cinco.

4) Se o número natural expresso por a^2-b^2 é primo, $a,b\in\mathbb{N}$, $b\neq 0$, então a é
(A) o antecedente de b.
(B) o consequente de b.
(C) múltiplo de b.
(D) divisor de b.
(E) um número par.

5) Se $\text{m.m.c.}(x,y)=2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 7$ e $\text{m.d.c.}(x,y)=2^3\cdot 3^2\cdot 5$, x e y números naturais, quantos são os valores possíveis para x?
(A) 16
(B) 8
(C) 6
(D) 4
(E) 2

6) Um certo líquido aumenta o seu volume em 15%, ao ser congelado. Quantos mililitros desse líquido deve-se colocar, no máximo, em um recipiente de 230 mililitros, sabendo-se que este não sofre qualquer alteração da sua capacidade nesse processo?
(A) $195,5$.
(B) 200.
(C) 205.
(D) 210.
(E) 215.

7) Considere uma circunferência λ de raio R e diâmetros perpendiculares AB e CD. O raio da menor circunferência tangente interiormente à λ e à corda AC, no seu ponto médio, é dado por
(A) $\frac{R}{4}$
(B) $\frac{R\sqrt{2}}{4}$
(C) $\frac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$
(D) $\frac{R\left(\sqrt{2}+1\right)}{4}$
(E) $\frac{R}{6}$

8) O resultado da divisão de 7^{12} por 6 é um número
(A) inteiro.
(B) com parte decimal finita.
(C) com parte decimal infinita periódica simples.
(D) com parte decimal infinita periódica composta.
(E) com parte decimal infinita e não periódica.

9) O resto da divisão de $5^{131}+7^{131}+9^{131}+15^{131}$ por 12 é igual a
(A) 0.
(B) 2.
(C) 7.
(D) 9.
(E) 11.

10) Num quadrilátero $ABCD$ tem-se: $AB=42$, $BC=48$, $CD=64$, $DA=49$ e P é o ponto de interseção entre as diagonais AC e BD. Qual é a razão entre os segmentos PA e PC, sabendo-se que a diagonal BD é igual a 56?
(A) $\frac{7}{8}$
(B) $\frac{8}{7}$

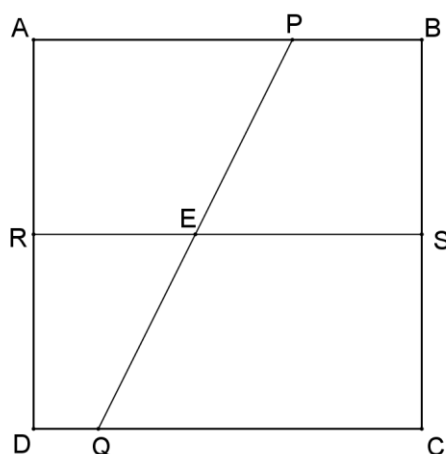
(C) $\frac{7}{6}$

(D) $\frac{6}{7}$

(E) $\frac{49}{64}$

11) Um fabricante observou que tem condições de aumentar, mensalmente, a sua produção em $1/5$ da produção do mês anterior. Considerando a condição dada, se, em janeiro de 2004, a sua produção for P, em que mês desse mesmo ano a sua produção será, pela primeira vez, maior ou igual a $2P$?
(A) abril.
(B) maio.
(C) junho.
(D) julho.
(E) agosto.

12) Dada a equação do $2°$ grau na incógnita x: $4x^2 + kx + 3 = 0$. Quantos são os valores inteiros possíveis do parâmetro k, tais que essa equação só admita raízes racionais.
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 6
(E) 8

13)

Num quadrado $ABCD$ tem-se os pontos: P, pertencente ao lado AB; Q, pertencente ao lado CD; R, médio de DA; e S, médio de BC. Se PB é o dobro de DQ e E é o ponto de interseção entre PQ e RS, quantos trapézios retângulos semelhantes sempre existirão na figura, sabendo-se que $PB + DQ < AB$?
(A) Dois.
(B) Três.
(C) Quatro.
(D) Cinco.
(E) Seis.

14) Analise as afirmativas abaixo, onde a e b são números reais.

I – $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = \sqrt{(a+b)^2}$

II – $\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = \sqrt{(a \cdot b)^2}$

III – $\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \sqrt{(a \div b)^2}$, $b \neq 0$

Assinale a alternativa correta.
(A) As afirmativas I, II e III são sempre verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é sempre verdadeira.
(C) Apenas as afirmativas I e II são sempre verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas I e III são sempre verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas II e III são sempre verdadeiras.

15) Dada a equação: $\left(x^2+1\right)^2 + \left(x^2+3x-17\right)^2 = 0$, pode-se afirmar que, no universo dos números reais, o seu conjunto solução
(A) é vazio.
(B) tem apenas um elemento.
(C) tem apenas dois elementos.
(D) tem apenas três elementos.
(E) tem apenas quatro elementos.

16) No estudo de ciências, item “Gases Perfeitos”, tem-se a seguinte fórmula: $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$, onde P_1, V_1 e T_1 são, respectivamente, as condições de pressão, volume e temperatura de um gás perfeito num primeiro estado; e P_2, V_2 e T_2 num segundo estado. Considerando a fórmula dada, analise as afirmativas abaixo.
I – Pressão e volume são diretamente proporcionais.
II – Pressão e temperatura são diretamente proporcionais.
III – Volume e temperatura são inversamente proporcionais.
Assinale a alternativa correta.
(A) As afirmativas I, II e III são falsas.
(B) Apenas a afirmativa I é falsa.
(C) Apenas a afirmativa II é falsa.
(D) Apenas a afirmativa III é falsa.
(E) Apenas as afirmativas I e III são falsas.

17) O conjunto dos trinta talheres de uma certa casa é constituído de garfos, facas e colheres, de aço inoxidável e aço comum. Sabe-se que
− existem cinco facas, seis garfos e sete colheres, todos de aço comum.
− o número total de garfos é o dobro do número de facas de aço inoxidável.
− o número de facas de aço inoxidável excede o número de colheres desse mesmo tipo de aço de duas unidades.
Quantas colheres tem esse conjunto de talheres?
(A) 10
(B) 11

(C) 12
(D) 13
(E) 14

18) Um estudante foi calculando o lado de um polígono regular de $2n$ lados, inscrito em uma circunferência de raio 10 centímetros, para n sucessivamente igual a 6, 12, 24, 48, 96, etc. Após determinar cada lado, calculou o perímetro p do respectivo polígono, e observou que p é um número cada vez mais próximo de, porém menor que
(A) 60
(B) 61
(C) 62
(D) 63
(E) 64

19) Sejam os polinômios $p = x^2 + 4x$ e $q = x^2 + (3k - 1)x$. Se a razão entre p e q é diferente de 1, necessariamente
(A) $k \neq \frac{5}{3}$
(B) $k \neq \frac{3}{5}$
(C) $k \neq \frac{4}{3}$
(D) $k \neq \frac{3}{4}$
(E) $k \neq 1$

20) Num triângulo acutângulo isósceles ABC, o segmento BP, P interno ao segmento AC, forma com o lado BA um ângulo de 15°. Quanto mede o maior ângulo de PBC, sabendo que os triângulos ABP e ABC são semelhantes?
(A) $65,5^\circ$
(B) $82,5^\circ$
(C) $97,5^\circ$
(D) 135°
(E) 150°

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2002/2003

1) O número de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual a
(A) 268
(B) 269
(C) 270
(D) 271
(E) 272

2) Se o conjunto solução da inequação $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-8\left(x+\frac{1}{x}\right)+10\le 0$ é S, então o número de elementos da interseção do conjunto S com o conjunto dos números inteiros é igual a:
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

3) Se $a=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ e $b=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, então $a+b$ é igual a:
(A) $\sqrt{10}$
(B) 4
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{5}+1$
(E) $\sqrt{3}+2$

4) Se x e y são números inteiros e positivos, representa-se o máximo divisor comum de x e y por $\text{mdc}(x, y)$; assim, o número de pares ordenados (x, y) que são soluções do sistema $\begin{cases} x+y=810 \\ \text{mdc}(x,y)=45 \end{cases}$ é igual a:
(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 16
(E) 18

5) Um relógio indica dois minutos menos do que a hora certa e adianta t minutos por dia. Se estivesse atrasado três minutos e adiantasse $\left(t+\frac{1}{2}\right)$ minutos por dia, então marcaria a hora certa exatamente um dia antes do que vai marcar. O tempo t, em minutos, que esse relógio adianta por dia está compreendido entre:

(A) $\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{9}$
(B) $\frac{2}{9}$ e $\frac{3}{9}$
(C) $\frac{4}{9}$ e $\frac{5}{9}$
(D) $\frac{6}{9}$ e $\frac{7}{9}$
(E) $\frac{8}{9}$ e $\frac{9}{9}$

6) Considere um triângulo retângulo e uma circunferência que passa pelos pontos médios dos seus três lados. Se x, y e z $(x<y<z)$ são as medidas dos arcos dessa circunferência, em graus, exteriores ao triângulo, então
(A) $z=360^\circ-y$
(B) $z=x+y$
(C) $x+y+z=180^\circ$
(D) $x+y=108^\circ$
(E) $z=2x+y$

7) Se os lados de um triângulo medem, respectivamente, $3x$, $4x$ e $5x$, em que x é um número inteiro positivo, então a distância entre os centros dos círculos inscritos e circunscritos a esse triângulo corresponde a
(A) $\frac{5x}{4}$
(B) $\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)x}{2}$
(C) $x\sqrt{2}$
(D) $\frac{x\sqrt{5}}{2}$
(E) $\frac{5x}{6}$

8)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Observe o quadrado acima em que as letras representam números naturais distintos desde 1 até 9. Se a adição de três números de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal, desse quadrado, tem sempre o mesmo resultado, então a letra E representa o número:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

9) Justapondo-se os números naturais conforme a representação abaixo, onde o sinal $*$ indica o último algarismo, forma-se um número de 1002 algarismos.

$$1234567891011121314151617181920 21\ldots *$$

O resto da divisão do número formado por 16 é igual a
(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8
(E) 10

10) Se $2x+y=1$, com x e y reais, então o maior valor da expressão $x^2+3xy+y^2$ é igual a
(A) $\frac{5}{4}$
(B) $\frac{7}{4}$
(C) $\frac{13}{8}$
(D) $\frac{17}{8}$
(E) $\frac{31}{16}$

11) Considere um triângulo equilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento $\overline{BC}$. Se a reta MN também intercepta a circunferência desse círculo no ponto P, $P \neq M$, então o segmento $\overline{NP}$ mede
(A) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$
(B) $\frac{3R\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$
(D) $\frac{R\sqrt{5}}{7}$
(E) $\frac{R\sqrt{5}}{3}$

12) Em um trapézio, cujas bases medem a e b, os pontos M e N pertencem aos lados não paralelos. Se $\overline{MN}$ divide esse trapézio em dois outros trapézios equivalentes, então a medida do segmento $\overline{MN}$ corresponde a:
(A) média aritmética de a e b
(B) média geométrica das bases
(C) raiz quadrada da média aritmética de a^2 e b^2.
(D) raiz quadrada da média harmônica de a^2 e b^2.
(E) média harmônica de a e b

13) Dois ciclistas, com velocidades constantes, porém diferentes, deslocam-se em uma estrada retilínea que liga os pontos A e B. Partem de A no mesmo instante e quando alcançam B, retornam a A, perfazendo o movimento $A-B-A-B$, uma única vez. Quando o mais veloz alcança o ponto B, pela primeira vez, retorna no sentido de A encontrando o outro a 4 km de B. Quando o mais lento atinge o ponto B, retorna imediatamente e reencontra, no meio do percurso, o outro que está vindo de A. Desprezando-se o tempo gasto em cada mudança no sentido de percurso, a distância entre os pontos A e B, em km, é igual a
(A) 10
(B) 12
(C) 14
(D) 16
(E) 18

14) Considere a equação $x^2-6x+m^2-1=0$ com parâmetro m inteiro não nulo. Se essa equação tem duas raízes reais e distintas com o número 4 compreendido entre essas raízes, então o produto de todos os possíveis valores de m é igual a
(A) -2
(B) -1
(C) 2
(D) 4
(E) 6

15) João vendeu dois carros de modelos SL e SR, sendo o preço de custo do primeiro 20% mais caro que o do segundo. Em cada carro teve um lucro de 20% sobre os seus respectivos preços de venda. Se o total dessa venda foi R\$ 88.000,00, o preço de custo do segundo modelo era, em reais, igual a:
(A) 30.000,00
(B) 32.000,00
(C) 34.000,00
(D) 35.000,00
(E) 36.000,00

16) Se x é um número inteiro tal que $\sqrt{2x^2+3x-5} \le x+1$, o número de elementos do conjunto solução dessa inequação é igual a:
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

17) Se um segmento $\overline{AB}$ tem 2 cm de comprimento, então a flecha do arco capaz de 135° desse segmento mede
(A) $\sqrt{2}+1$
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{2}-1$
(D) $\sqrt{3}$
(E) $2-\sqrt{2}$

18) Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2-(ba)^2=(cc)^2$.
O valor de $(a+b+c)$ é igual a:
(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

19) Se a e b são dois números reais, denotamos por $\min(a,b)$ o menor dos números a e b, isto é, $\min(a,b)=\begin{cases} a, & \text{se } a \le b \\ b, & \text{se } a \ge b \end{cases}$. O número de soluções inteiras negativas da inequação $\min(2x-7, 8-3x) > -3x+3$ é igual a:
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

20) Considere os triângulos ABC e MNP. Se as medidas dos lados do segundo triangulo são, respectivamente, iguais às medidas das medianas do primeiro, então a razão da área de MNP para a área de ABC é igual a:

(A) $\frac{1}{3}$

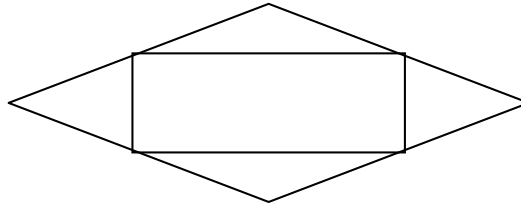
(B) $\frac{1}{2}$

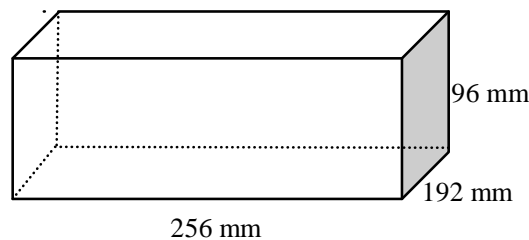
(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{5}{6}$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2001/2002

1) Considere um retângulo inscrito em um losango, conforme a figura abaixo. Se as diagonais do losango medem, respectivamente, 8 cm e 12 cm e a área do retângulo é 24 cm^2, então o perímetro deste retângulo, em cm, é igual a:

a) 28
b) 24
c) 22
d) 20
e) 18

2) Um pedaço de doce de leite tem a forma de um paralelepípedo, com seis faces retangulares, como indica a figura abaixo. O doce deve ser dividido totalmente em cubos iguais, cada um com $x \text{ mm}$ de aresta. O maior valor inteiro de x é:

(A) 16
(B) 18
(C) 24
(D) 30
(E) 32

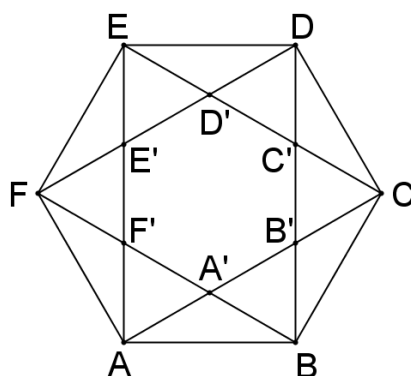
3) Marta comprou petecas, bolas e bonecas, pagando por cada unidade, respectivamente, R\$ 1,00, R\$ 10,00 e R\$ 20,00. Gastou R\$ 220,00 em um total de 101 unidades desses brinquedos. Quantas petecas ela comprou?
(A) 95
(B) 93
(C) 92
(D) 91
(E) 90

4) O mínimo múltiplo comum entre dois números naturais a e b é 360 e $a \cdot b = 3600$. Qual o menor valor que $a + b$ pode assumir?
(A) 120
(B) 130
(C) 150
(D) 200
(E) 370

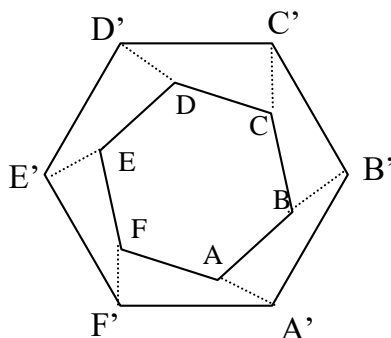
5) Se $2 < x < 3$, então $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ é igual a:
(A) 2
(B) $\sqrt{x}$
(C) $2\sqrt{x-1}$
(D) $2\sqrt{x}$
(E) 3

6) Se a e b são números naturais e $2a + b$ é divisível por 13, então um número múltiplo de 13 é:
(A) $91a + b$
(B) $92a + b$
(C) $93a + b$
(D) $94a + b$
(E) $95a + b$

7) Considere-se um soro glicosado a 5% quando para cada 100 ml de soro tem-se 5 ml de glicose. Com dois soros X e Y, respectivamente, glicosados a 5% e 23%, deseja-se obter 3 litros de uma mistura com 8% de glicose. Portanto, necessita-se, em litros, de um volume do soro X igual a:
(A) $2,5$
(B) $2,3$
(C) $2,1$
(D) $2,0$
(E) $1,8$

8) As diagonais AC, BD, CE, DF, EA e FB de um hexágono regular $ABCDEF$ interceptam-se formando outro hexágono $A'B'C'D'E'F'$ conforme a figura abaixo. Qual a razão entre as áreas do maior e a do menor hexágono?

(A) $\sqrt{2}$
(B) $\sqrt{3}$
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 2
(E) 3

9) Se os números x, y e z são respectivamente, iguais às médias aritmética, geométrica e harmônica de dois números reais positivos, então:
(A) $xz = 1$
(B) $xz = y$
(C) $xz = y^2$
(D) $y^2 + z^2 = x^2$
(E) $(y+z)^2 = x^2$

10) Observe a figura abaixo, onde os seis lados do hexágono regular $ABCDEF$ foram prolongados de segmentos $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$, de modo que a medida do segmento AA' corresponde a $P\%$ da medida do lado AB, $(P > 0)$. Se o percentual de aumento que a área do hexágono $A'B'C'D'E'F'$ apresenta em relação à área do hexágono original é 75%, então o valor de P é:

(A) 25
(B) 30
(C) 45
(D) 50
(E) 75

11) Se a é um número natural, $a^5 - 5a^3 + 4a$ é sempre divisível por:
(A) 41
(B) 48
(C) 50
(D) 60
(E) 72

12) Considere um quadrado $ABCD$ e dois triângulos equiláteros ABP e BCQ, respectivamente, interno e externo ao quadrado. A soma das medidas dos ângulos $A\hat{D}P$, $B\hat{Q}P$ e $D\hat{P}Q$ é igual a:
(A) 270º
(B) 300º
(C) 330º
(D) 360º
(E) 390º

13) Observe a figura abaixo que representa três semicircunferências de centros M, N e P, tangentes duas a duas, respectivamente, nos pontos A, B e C. Os segmentos MM', NN', BB' e PP' são perpendiculares à reta r. Se a medida do segmento BB' é $6\,cm$, a área do triângulo $M'N'P'$ em cm^2, é igual a:

(A) 9
(B) 10
(C) 12
(D) 18
(E) 36

14) Um torneio de judô é disputado por 10 atletas e deve ter apenas um campeão. Em cada luta não pode haver empate e aquele que perder três vezes deve ser eliminado da competição. Qual o número máximo de lutas necessário para se conhecer o campeão?
(A) 27
(B) 28
(C) 29
(D) 30
(E) 31

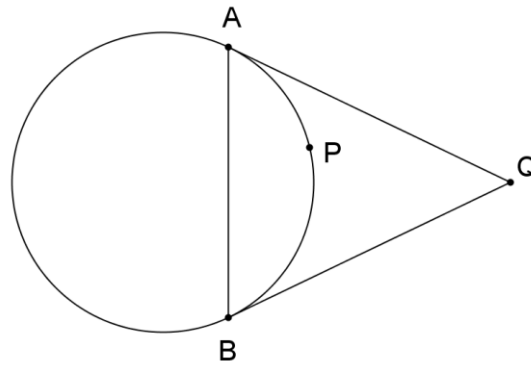
15) A soma de dois números reais distintos é igual ao produto desses números. O menor valor natural desse produto é igual a:
(A) 8
(B) 7
(C) 6
(D) 5
(E) 4

16) As dimensões de um retângulo são, em metros, indicadas por x e y. Sua área aumenta $52\ m^2$ quando se acrescenta $2\ m$ a x e $4\ m$ a y. Sua superfície diminui $52\ m^2$ quando se subtrai $2\ m$ de x e $8\ m$ de y. Qual o valor de x?
(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

17) O conjunto solução da equação $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{x-1}}=1$ é igual a:
(A) $\varnothing$
(B) $\mathbb{R}$
(C) $\mathbb{R}-\{-1,\ 0,\ 1\}$
(D) $\mathbb{R}-\{-1,1\}$
(E) $\{0\}$

18) Quatro corredores, João, Pedro, André, e Fábio combinaram que, ao final de cada corrida, o que ficasse em último lugar dobraria o dinheiro que cada um dos outros possuía. Competiram 4 vezes e ficaram em último lugar na $1^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}}$, $3^{\underline{a}}$ e $4^{\underline{a}}$ corridas respectivamente, João, Pedro, André, e Fábio. Se no final da $4^{\underline{a}}$ competição, cada um ficou com R\$ 16,00, então, inicialmente João possuía:
(A) R\$ 5,00
(B) R\$ 9,00
(C) R\$ 16,00
(D) R\$ 17,00
(E) R\$ 33,00

19) A equação $x^4-(a-6)x^2+(9-a)=0$, na variável x, tem quatro raízes reais e distintas, se e somente se:
(A) $a>8$
(B) $6<a<8$
(C) $8<a<9$
(D) $6<a<9$
(E) $a>9$

20) Na figura abaixo, o ponto P do menor arco AB dista 6 cm e 10 cm, respectivamente, das tangentes AQ e BQ. A distância, em cm, do ponto P à corda AB é igual a:

(A) $\sqrt{30}$
(B) $2\sqrt{15}$
(C) 16
(D) 18
(E) $6\sqrt{10}$

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2005/2006

1) e (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
2) a (MDC e MMC)
3) b (Lógica e conjuntos)
4) c (Polígonos – relações métricas)
5) d (Áreas)
6) c (Função quadrática)
7) d (Polígonos – ângulos e diagonais)
8) c (Inequação produto quociente)
9) e (MDC e MMC)
10) c (Polígonos – relações métricas)
11) b (Sistemas lineares)
12) a (Razões e proporções)
13) b (Polígonos – ângulos e diagonais)
14) c (Problemas tipo torneira)
15) d (Juros simples e compostos)
16) a (Produtos notáveis e fatoração)
17) a (Triângulos retângulos)
18) b (Triângulos – semelhança e relações métricas)
19) b (Operações com mercadorias)
20) e (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2004/2005

1) d (Áreas)
2) d (Operações com números naturais e inteiros)
3) d (Equação do 2° grau)
4) e (Polinômios)
5) a (Quadriláteros)
6) d (Inequações produto quociente)
7) b (Áreas)
8) e (Áreas)
9) d (Potências e raízes)
10) a (Múltiplos e divisores)
11) c (Racionalização e radical duplo)
12) b (Produtos notáveis e fatoração)
13) a (Divisibilidade e congruências)
14) b (Divisão em partes proporcionais)
15) c (Produtos notáveis e fatoração)
16) e (Divisibilidade e congruências)
17) e (Função quadrática)

18) e (Triângulos retângulos)
19) c (Equação do 2° grau)
20) a (Potência de ponto)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2003/2004

1) d (Sistemas lineares)
2) b (Equações irracionais)
3) d (Triângulos – pontos notáveis)
4) b (Múltiplos e divisores)
5) b (MDC e MMC)
6) b (Porcentagem)
7) c (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
8) d (Números racionais)
9) a (Divisibilidade e congruência)
10) e (Triângulos – semelhança e relações métricas)
11) b (Potências e raízes)
12) d (Equação do 2° grau)
13) a (Quadriláteros)
14) e (Potências e raízes)
15) a (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
16) e (Razões e proporções)
17) a (Sistemas lineares)
18) d (Polígonos – relações métricas)
19) a (Polinômios)
20) c (Triângulos – semelhança e relações métricas)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2002/2003

1) b (Contagem)
2) b (Inequação)
3) d (Racionalização e radical duplo)
4) a (MDC e MMC)
5) c (Sistemas não lineares e problemas relacionados)
6) b (Ângulos na circunferência e arco capaz)
7) d (Circunferência – posições relativas e segmentos tangentes)
8) e (Sistemas lineares e problemas relacionados)
9) e (Contagem)
10) a (Função quadrática)
11) c (Potência de ponto)
12) c (Áreas)
13) d (Razões e proporções)
14) d (Função quadrática)
15) b (Operações com mercadorias)
16) c (Inequações irracionais)
17) c (Ângulos na circunferência e arco capaz)
18) d (Sistemas de numeração)

19) a (Função do 1° grau)
20) d (Áreas)

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL 2001/2002

1) d (Áreas)
2) e (MDC e MMC)
3) e (Sistemas lineares)
4) b (MDC e MMC)
5) a (Racionalização)
6) c (Múltiplos e divisores)
7) a (Misturas)
8) e (Áreas)
9) c (Médias)
10) d (Áreas)
11) d (Múltiplos e Divisores)
12) b (Triângulos – ângulos, congruência, desigualdades)
13) a (Áreas)
14) c (Lógica e conjuntos)
15) d (Equação do 2° grau)
16) b (Áreas)
17) c (Equações fracionárias)
18) e (Problemas do 1° grau)
19) c (Equações biquadradas e redutíveis ao 2° grau)
20) b (Potência de ponto)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 1984 A 2016

ASSUNTO	F8	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL	PERCENTUAL
Raciocínio lógico									1		1							2	1														1	6	0,9%
Conjuntos		1	2	2	1	1	1		1	1		1			2	1		1					1	1	1			1	1		1		1	22	3,3%
Operações com números naturais e inteiros	1								1	1			1									1				1	1			2				8	1,2%
Números racionais	1				1					1		1	2	1	1		1				1									2	1	2		14	2,1%
Conjuntos numéricos e números reais						2					1					2									1				1					7	1,1%
Sistemas de numeração	1					1		1		1				1			1			1					1		2			1			2	12	1,8%
Múltiplos e divisores	2	1		1				1	1	1			1						2		1	1		2		1	1	1	1	2	3		2	23	3,5%
Divisibilidade e crongruência		1			1						1		1					1			1	2					2	1	3	1		1		16	2,4%
Função parte inteira																												1						1	0,2%
MDC/MMC	1				1			1			1							1	2	1	1		2		1	2				1		1		15	2,3%
Razões e proporções		2			1		1		1				2		2		1	1		1	1		1		2		1					1		18	2,7%
Regra de três	3												1																				1	2	0,3%
Porcentagem			1							1		1		1			1	1			1			1		2								10	1,5%
Divisão em partes proporcionais e regra de sociedade			1	1																		1		1	1									5	0,8%
Operações com mercadorias				1			1	1			1		1	1	1			1		1			1					1						11	1,7%
Juros simples e compostos						1		1	1		1	1				1							1		1									8	1,2%
Misturas	1				1											1			1								1			1				5	0,8%
Médias		1	1					1				1						1	1					1									1	8	1,2%
Contagem e calendário					1					1				1						2					1						2			8	1,2%
Problemas tipo torneira	1		1								1												1	1	1									5	0,8%
Sistema métrico			1	1			1				1		1	1																				6	0,9%
Potências e raízes	1	3	2	1	2	1	1	1	1			1		1	1	1	3	3			2	1		1		1	1		2	2	1	1	1	35	5,3%
Produtos notáveis e fatoração	2	1	1	1	1	1	1		1	1	1		2		2	1		1				2	1	3	2	1			2	1		2		29	4,4%
Racionalização e radical duplo	2			1	1	1	1	1	1		1			1		1			1	1		1				1			1	1				15	2,3%
Equação do 2º grau	5	1	2	1	1	2	1	1	1			2	1			1	1		1		1	2			1	1	1				1	1		24	3,6%
Função quadrática	1	1	1		1	1	1	1			1				1	1				2		1	1	1		1	1							16	2,4%
Equações fracionárias										1									1							1		1	1	1				6	0,9%
Equações biquadradas e redutíveis ao 2º grau			1	1						4	1	2		1	2		1		1		1		1		1						1			18	2,7%
Equações e inequações irracionais	3	1					1		1			1		1						1	1			1		1		1	1		1	1		13	2,0%
Polinômios e equações polinomiais		1	1	3	2	1		1				1									1	1						2		1		1	1	17	2,6%
Sequências																													1					1	0,2%
Função do 1º grau				1																1									1					3	0,5%
Equação do 1º grau e problemas do 1º grau	1	1						1			1			1	1		2		1													1		9	1,4%
Sistemas lineares e problemas relacionados		1	2			1	2			1	1	1		1		2	1	1	1	1	2		1	1		1	1					1	1	24	3,6%
Sistemas não lineares e problemas relacionados	1	1		1		1	1	1	1											1				1		1		3			1			13	2,0%
Inequações											1	1		1						1								1						5	0,8%
Inequações produto-quociente	1	1		1	2		1	1	1						1							1	1				1				1		1	13	2,0%
Desigualdades																												1						1	0,2%
Fundamentos e ângulos																									1									1	0,2%
Triângulos - ângulos, congruência e desigualdades			1	1					1			1	1	1	1	1	2	2	1				1							1				15	2,3%
Triângulos - pontos notáveis												1	1	1		1					1						1	1			2		1	10	1,5%
Triângulos retângulos							1			1	1		1			1						1	1			1					1		1	10	1,5%
Triângulos - semelhança e relações métricas	2	1	1	2	2	1	1	1		1					1	2					2		1		1		1					2		20	3,0%
Quadriláteros	1		1	2		1	1			1		1		1				1			1	1		1		1	1	1	1	2				18	2,7%
Polígonos - ângulos e diagonais	2		2		1	1		1	1		1	1		1	1			1					2						1					14	2,1%
Polígonos regulares - relações métricas				1				1	1		1		1			1	1				1		2	1										11	1,7%
Circunferência - posições relativas e segmentos tangentes	1			1					1		1		1			1				1	1			1	1	1	1	1						12	1,8%
Arco capaz, ângulos e comprimentos na circunferência		1			1	1			1	1				1			1	1		2					1	1	1		1		2		1	17	2,6%
Circunferência - relações métricas e potência de ponto	3	2					1	1				1	1		2				1	1		1												11	1,7%
Áreas	3	3	3	1	4	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1	4	1	5	2		3	1	2	2	1	2	3	2	1	2	5	5	69	10,5%
TOTAL POR PROVA	**40**	**25**	**25**	**25**	**25**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	660	**100,0%**
Aritmética	11	6	7	6	7	5	4	6	6	7	8	5	10	6	6	5	4	9	7	6	6	5	7	7	10	6	8	5	6	10	7	5	8	210	31,82%
Álgebra	17	12	10	11	10	9	10	8	7	7	7	9	3	7	8	7	8	5	6	8	8	9	5	8	4	9	5	9	9	6	6	8	4	242	36,67%
Geometria Plana	12	7	8	8	8	6	6	6	7	6	5	6	7	7	6	8	8	6	7	6	6	6	8	5	6	5	7	6	5	4	7	7	8	208	31,52%

CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES POR ASSUNTO

ARITMÉTICA

RACIOCÍNIO LÓGICO: 2016-10; 2002-14; 2001-1; 2001-6; 1994-20; 1991-2;

CONJUNTOS: 2016-19; 2014-4; 2012-10; 2011-11; 2008-15; 2007-6; 2006-3; 2001-15; 1999-4; 1998-9; 1998-17; 1995-18; 1992-4; 1991-3; 1989-14; 1988-5; 1987-6; 1986-1; 1986-2; 1985-1; 1985-18; 1984-1

OPERAÇÕES COM NÚMEROS NATURAIS E INTEIROS: 2013-12; 2013-15; 2010-14; 2009-13; 2005-2; 1996-14; 1992-1; 1991-1; FB-16

NÚMEROS RACIONAIS: 2015-7; 2015-9; 2014-1; 2013-2; 2013-18; 2004-8; 2000-4; 1998-20; 1997-11; 1996-19; 1996-20; 1995-16; 1992-13; 1987-7; FB-12

CONJUNTOS NUMÉRICOS E NÚMEROS REAIS: 2012-11; 2008-20; 1999-10; 1999-15; 1994-11; 1988-1; 1988-2

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: 2016-3; 2016-12; 2013-4; 2010-3; 2010-13; 2008-5; 2003-18; 2000-3; 1997-3; 1992-6; 1990-9; 1988-3; FB-23

MÚLTIPLOS E DIVISORES: 2016-17; 2016-18; 2014-10; 2014-17; 2014-19; 2013-6; 2013-8; 2012-14; 2011-4; 2010-8; 2009-18; 2007-11; 2007-17; 2005-10; 2004-4; 2002-6; 2002-11; 1996-11; 1992-14; 1991-4; 1990-11; 1986-4; 1984-7; FB-7; FB-13

DIVISIBILIDADE E CONGRUÊNCIA: 2015-14; 2013-11; 2012-1; 2012-15; 2012-20; 2011-5; 2010-5; 2010-15; 2005-13; 2005-16; 2004-9; 2001-19; 1996-18; 1994-9; 1987-2; 1984-2

FUNÇÃO PARTE INTEIRA: 2011-8;

MDC E MMC: 2015-8; 2013-7; 2009-4; 2009-14; 2008-11; 2006-2; 2006-9; 2004-5; 2003-4; 2002-2; 2002-4; 2001-3; 1994-5; 1990-8; 1987-4; FB-38

RAZÕES E PROPORÇÕES: 2015-2; 2010-19; 2008-12; 2008-18; 2006-12; 2004-16; 2003-13; 2001-5; 2000-5; 1998-7; 1998-15; 1996-6; 1996-17; 1991-6; 1989-9; 1987-1; 1984-4; 1984-21

REGRA DE TRÊS: 2016-4; 1996-16; FB-9; FB-25; FB-30

PORCENTAGEM: 2009-10; 2009-15; 2007-4; 2004-6; 2001-16; 2000-19; 1997-2; 1995-3; 1992-20; 1985-6

DIVISÃO EM PARTES PROPORCIONAIS E REGRA DE SOCIEDADE: 2008-14; 2007-10; 2005-14; 1986-11; 1985-11

OPERAÇÕES COM MERCADORIAS: 2011-10; 2006-19; 2003-15; 2001-11; 1998-6; 1997-4; 1996-12; 1994-16; 1990-16; 1989-8; 1986-6

JUROS SIMPLES E COMPOSTOS: 2008-4; 2006-15; 1999-8; 1995-8; 1994-3; 1991-7; 1990-6; 1988-4

MISTURAS: 2013-13; 2010-7; 2002-7; 1999-3; 1987-3; FB-39

MÉDIAS: 2016-5; 2007-19; 2002-9; 2001-9; 1995-14; 1990-10; 1985-25; 1984-3

CONTAGEM E CALENDÁRIO: 2014-3; 2014-11; 2008-9; 2003-1; 2003-9; 1997-5; 1992-5; 1987-9

PROBLEMAS TIPO TORNEIRA: 2008-16; 2007-3; 2006-14; 1994-10; 1985-3; FB-37

SISTEMA MÉTRICO: 1997-10; 1996-10; 1994-13; 1989-13; 1986-13; 1985-23

ÁLGEBRA

POTÊNCIAS E RAÍZES: 2016-11; 2015-10; 2014-7; 2013-1; 2013-19; 2012-7; 2012-16; 2010-18; 2009-8; 2007-7; 2005-9; 2004-11; 2004-14; 2001-4; 2001-13; 2001-14; 2000-6; 2000-9; 2000-11; 1999-5; 1998-16; 1997-15; 1995-12; 1991-5; 1990-2; 1989-5; 1988-7; 1987-16; 1987-24; 1986-7; 1985-2; 1985-15; 1984-5; 1984-6; 1984-15; FB-3

PRODUTOS NOTÁVEIS E FATORAÇÃO: 2015-1; 2015-18; 2013-16; 2012-3; 2012-4; 2009-12; 2008-1; 2008-3; 2007-8; 2007-9; 2007-12; 2006-16; 2005-12; 2005-15; 2001-7; 1999-12; 1998-10; 1998-14; 1996-3; 1996-15; 1994-19; 1992-8; 1991-13; 1989-10; 1988-14; 1987-17; 1986-16; 1985-8; 1984-12; FB-8; FB-33

RACIONALIZAÇÃO E RADICAL DUPLO: 2013-17; 2012-13; 2009-19; 2005-11; 2003-3; 2002-5; 1999-2; 1997-18; 1994-8; 1991-10; 1990-14; 1989-11; 1988-6; 1987-5; 1986-9; FB-10; FB-14

EQUAÇÃO DO 2° GRAU: 2015-11; 2014-12; 2010-6; 2009-20; 2008-8; 2005-3; 2005-19; 2004-12; 2002-15; 2000-15; 1999-20; 1996-4; 1995-2; 1995-15; 1991-12; 1990-4; 1989-7; 1988-8; 1988-11; 1987-20; 1986-3; 1985-4; 1985-17; 1984-10; FB-11; FB-17; FB-28; FB-29; FB-32

FUNÇÃO QUADRÁTICA: 2010-12; 2009-16; 2007-14; 2006-6; 2005-17; 2003-10; 2003-14; 1999-18; 1998-19; 1994-2; 1990-18; 1989-17; 1988-13; 1987-21; 1985-13; 1984-8; FB-36

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS: 2013-10; 2012-2; 2011-20; 2009-3; 2002-17; 1992-12;

EQUAÇÕES BIQUADRADAS E REDUTÍVEIS AO 2° GRAU: 2014-5; 2008-10; 2006-20; 2004-15; 2002-19; 2000-17; 1998-3; 1998-8; 1997-14; 1995-17; 1995-20; 1994-15; 1992-10; 1992-11; 1992-16; 1992-18; 1986-15; 1985-10

EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES IRRACIONAIS: 2015-3; 2014-9; 2012-5; 2011-12; 2009-7; 2007-13; 2004-2; 2003-16; 1997-7; 1995-7; 1991-8; 1989-12; 1984-11; FB-24; FB-34; FB-40

POLINÔMIOS E EQUAÇÕES POLINOMIAIS: 2016-9; 2015-16; 2013-14; 2011-2; 2011-13; 2005-4; 2004-19; 1995-4; 1990-20; 1988-12; 1987-14; 1987-25; 1986-8; 1986-10; 1986-14; 1985-19; 1984-13

SEQUÊNCIAS: 2012-12;

FUNÇÃO DO 1° GRAU: 2012-17; 2003-19; 1986-12

EQUAÇÃO DO 1° GRAU E PROBLEMAS DO 1º GRAU: 2015-15; 2002-18; 2000-7; 2000-10; 1998-4; 1997-1; 1994-14; 1990-7; 1984-16; FB-15

SISTEMAS LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2016-2; 2015-12; 2010-4; 2009-1; 2007-1; 2006-11; 2004-1; 2004-17; 2003-8; 2002-3; 2001-18; 2000-16; 1999-11; 1999-17; 1997-17; 1995-11; 1994-12; 1992-17; 1989-4; 1989-15; 1988-10; 1985-9; 1985-22; 1984-14

SISTEMAS NÃO LINEARES E PROBLEMAS RELACIONADOS: 2014-18; 2011-15; 2011-16; 2011-18; 2009-2; 2007-16; 2003-5; 1991-9; 1990-19; 1989-6; 1988-9; 1986-5; 1984-9; FB-31

INEQUAÇÕES: 2011-17; 2003-2; 1997-12; 1995-9; 1994-18;

INEQUAÇÕES PRODUTO QUOCIENTE: 2016-1; 2014-20; 2010-9; 2006-8; 2005-6; 1998-18; 1991-11; 1990-3; 1989-20; 1987-8; 1987-13; 1986-21; 1984-17; FB-6

DESIGUALDADES: 2011-19;

GEOMETRIA PLANA

FUNDAMENTOS E ÂNGULOS: 2008-2

TRIÂNGULOS – ÂNGULOS, CONGRUÊNCIA, DESIGUALDADES: 2013-20; 2006-1; 2002-12; 2001-17; 2001-20; 2000-12; 2000-20; 1999-19; 1998-12; 1997-19; 1996-1; 1995-19; 1991-16; 1986-18; 1985-7

TRIÂNGULOS – PONTOS NOTÁVEIS: 2016-13; 2014-13; 2014-14; 2011-14; 2010-11; 2004-3; 1999-1; 1997-13; 1996-7; 1995-5;

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS: 2016-6; 2014-8; 2009-17; 2006-17; 2005-18; 1999-16; 1996-9; 1994-4; 1992-7; 1989-1;

TRIÂNGULOS – SEMELHANÇA E RELAÇÕES MÉTRICAS: 2015-6; 2015-17; 2010-10; 2008-7; 2006-18; 2004-10; 2004-20; 1999-9; 1999-14; 1998-2; 1992-19; 1990-1; 1989-16; 1988-15; 1987-12; 1987-22; 1986-22; 1986-25; 1985-12; 1984-22; FB-4; FB-19

QUADRILÁTEROS: 2013-3; 2013-5; 2012-8; 2011-9; 2010-17; 2009-6; 2007-5; 2005-5; 2004-13; 2001-2; 1997-20; 1995-1; 1992-9; 1989-3; 1988-20; 1986-19; 1986-20; 1985-21; FB-20

POLÍGONOS – ÂNGULOS E DIAGONAIS: 2012-18; 2006-7; 2006-13; 2001-10; 1998-11; 1997-6; 1995-10; 1994-7; 1991-14; 1990-5; 1988-18; 1987-11; 1985-5; 1985-16; FB-2; FB-18

POLÍGONOS – RELAÇÕES MÉTRICAS: 2007-2; 2006-4; 2006-10; 2004-18; 2000-13; 1999-6; 1996-5; 1994-1; 1991-18; 1990-12; 1986-23

CIRCUNFERÊNCIA – POSIÇÕES RELATIVAS E SEGMENTOS TANGENTES: 2011-6; 2010-1; 2009-9; 2008-17; 2007-18; 2004-7; 2003-7; 1999-13; 1996-13; 1994-17; 1991-15; 1986-17; FB-22

ARCO CAPAZ, ÂNGULOS E COMPRIMENTOS NA CIRCUNFERÊNCIA: 2016-7; 2014-6; 2014-15; 2012-9; 2010-16; 2009-5; 2008-6; 2003-6; 2003-17; 2001-12; 2000-18; 1997-8; 1992-3; 1991-19; 1988-17; 1987-18; 1984-20

CIRCUNFERÊNCIA – RELAÇÕES MÉTRICAS E POTÊNCIA DE PONTO: 2005-20; 2003-11; 2002-20; 1998-1; 1998-5; 1996-8; 1995-13; 1990-15; 1989-19; 1984-18; 1984-23; FB-21; FB-26; FB-27

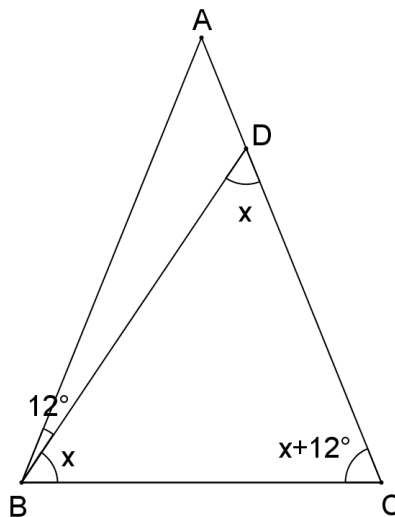
ÁREAS: 2016-8; 2016-14; 2016-15; 2016-16; 2016-20; 2015-4; 2015-5; 2015-13; 2015-19; 2015-20; 2014-2; 2014-16; 2013-9; 2012-6; 2012-19; 2011-1; 2011-3; 2011-7; 2010-2; 2010-20; 2009-11; 2008-13; 2008-19; 2007-15; 2007-20; 2006-5; 2005-1; 2005-7; 2005-8; 2003-12; 2003-20; 2002-1; 2002-8; 2002-10; 2002-13; 2002-16; 2001-8; 2000-1; 2000-2; 2000-8; 2000-14; 1999-7; 1998-13; 1997-9; 1997-16; 1996-2; 1995-6; 1994-6; 1992-2; 1992-5; 1991-17; 1991-20; 1990-13; 1990-17; 1989-2; 1989-18; 1988-16; 1988-19; 1987-10; 1987-15; 1987-19; 1987-23; 1986-24; 1985-14; 1985-20; 1985-24; 1984-19; 1984-24; 1984-25; FB-1; FB-5; FB-35

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2005/2006

1) Num triângulo ABC, $AB = AC$, o ponto D interno ao lado AC é determinado de modo que $DC = BC$. Se o ângulo ABD mede 12°, qual a medida, em graus, do ângulo BAC?
(A) 100
(B) 88
(C) 76
(D) 54
(E) 44

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$BC = DC \Rightarrow D\hat{B}C = B\hat{D}C = x$

$AB = AC \Rightarrow A\hat{C}B = A\hat{B}C = A\hat{B}D + D\hat{B}C = 12^\circ + x$

$\Delta BCD: x + x + (x + 12^\circ) = 180^\circ \Leftrightarrow x = 56^\circ$

$\Delta ABC: B\hat{A}C = 180^\circ - A\hat{B}C - A\hat{C}C = 180^\circ - 2 \cdot (x + 12^\circ) = 180^\circ - 2 \cdot (56^\circ + 12^\circ) = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$

2)

	1	1	2
A	B	C	40
D	E	0	

O algoritmo acima foi utilizado para o cálculo do máximo divisor comum entre os números A e B. Logo, $A + B + C$ vale
(A) 400

(B) 300
(C) 200
(D) 180
(E) 160

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
O algoritmo acima se baseia no algoritmo da divisão $D = d \cdot Q + R$, ou seja, o dividendo é o produto do divisor pelo quociente mais o resto. A linha de cima apresenta os quocientes, a linha de baixo os restos. A linha do meio apresenta os dividendos e divisores, sendo que cada resto é o divisor seguinte.
Considerando o exposto acima, podemos escrever as seguintes equações.

$$\begin{cases} C = 40 \cdot 2 + 0 = 80 \\ E = 40 \\ B = C \cdot 1 + E \Rightarrow B = 80 + 40 = 120 \\ C = D \Rightarrow D = 80 \\ A = B \cdot 1 + D \Rightarrow A = 120 + 80 = 200 \end{cases} \Rightarrow A + B + C = 200 + 120 + 80 = 400$$

3) Sejam os conjuntos $A = \{1,3,4\}$, $B = \{1,2,3\}$ e X. Sabe-se que qualquer subconjunto de $A \cap B$ está contido em X, que por sua vez é subconjunto de $A \cup B$. Quantos são os possíveis conjuntos X?
(A) 3
(B) 4
(C) 5
(D) 6
(E) 7

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
$A \cap B = \{1,3\}$
$A \cup B = \{1,2,3,4\}$
Dado que qualquer subconjunto de $A \cap B$ está contido em X, então $A \cap B \subset X$.
$\Rightarrow A \cap B \subset X \subset A \cup B \Leftrightarrow \{1,3\} \subset X \subset \{1,2,3,4\}$
$\Leftrightarrow X = \{1,3\} \vee X = \{1,3,2\} \vee X = \{1,3,4\} \vee X = \{1,3,2,4\}$
Logo, há 4 possíveis conjuntos X.
Observe que esse valor é exatamente a quantidade de subconjuntos de $\{2,4\} = \{1,2,3,4\} - \{1,3\}$.

4) Três dos quatro lados de um quadrilátero circunscritível são iguais aos lados do triângulo equilátero, quadrado e hexágono regular circunscritos a um circulo de raio 6. Qual é a medida do quarto lado desse quadrilátero, sabendo-se que é o maior valor possível nas condições dadas?
(A) $16\sqrt{3} - 12$
(B) $12\sqrt{3} - 12$

(C) $8\sqrt{3}+12$
(D) $12\sqrt{3}+8$
(E) $16\sqrt{3}-8$

RESPOSTA: C

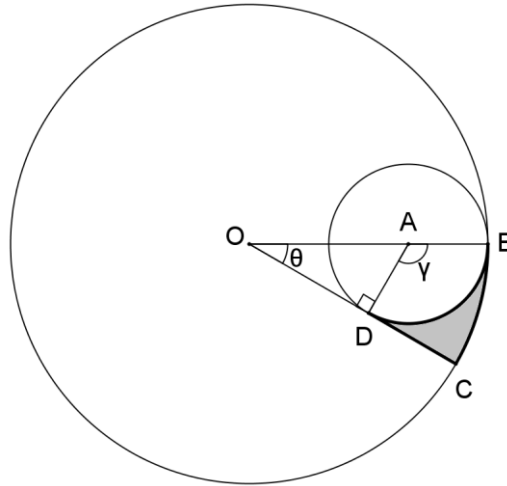
RESOLUÇÃO:
O lado do triângulo equilátero circunscrito a um círculo de raio R é $L_3 = 2\sqrt{3}R$.
O lado do quadrado circunscrito a um círculo de raio R é $L_4 = 2R$.
O lado do hexágono regular circunscrito a um círculo de raio R é $L_6 = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.
O teorema de Pitot estabelece que as somas dos lados opostos de um quadrilátero circunscritível são iguais. Assim, para que o quarto lado tenha a maior medida possível, ele deve ser oposto ao menor lado, ou seja, o lado do hexágono regular circunscrito.
Sendo x a medida do quarto lado, pelo teorema de Pitot, temos:

$$x + L_6 = L_3 + L_4 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3}R + 2R - \frac{2\sqrt{3}}{3}R = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\right)R.$$

$$R = 6 \Rightarrow x = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}+2\right)\cdot 6 = \left(8\sqrt{3}+12\right)$$ unidades de comprimento.

5) Um círculo α de centro num ponto A e raio $2\sqrt{3}$ é tangente interior, num ponto B, a um círculo β de centro num ponto O e raio $6\sqrt{3}$. Se o raio OC é tangente a α num ponto D, a medida da área limitada pelo segmento DC e os menores arcos BC de β e BD de α é igual a
(A) $4\pi-3\sqrt{3}$
(B) $5\pi-4\sqrt{3}$
(C) $4\pi-6\sqrt{3}$
(D) $5\pi-6\sqrt{3}$
(E) $5\pi-5\sqrt{3}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$AD = 2\sqrt{3}$

$OA = OB - AB = 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{AD}{OA} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

$OD = OA \cdot \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$

$\gamma = 180^\circ - O\hat{A}D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

A área procurada é dada pela área de um setor circular de 30° em β, menos a área do triângulo OAD e menos a área de um setor circular de 120° em α.

$S = \dfrac{\pi \cdot \left(6\sqrt{3}\right)^2}{12} - \dfrac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2}{3} = 9\pi - 6\sqrt{3} - 4\pi = 5\pi - 6\sqrt{3}$ unidades de área

6) As raízes do trinômio do 2° grau $y = ax^2 + bx + c$ são 1000 e 3000. Se quando x vale 2010, o valor numérico de y é 16, qual é o valor numérico de y, quando x vale 1990?

(A) 64
(B) 32
(C) 16
(D) 8
(E) 4

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Como as raízes do trinômio são 1000 e 3000, então a abscissa do vértice é $x_V = \dfrac{1000 + 3000}{2} = 2000.$

Assim, o eixo de simetria do gráfico da função é a reta vertical $x = 2000$.

As abscissas 2010 e 1990 estão à mesma distância do eixo de simetria $x = 2000$, logo possuem a mesma ordenada.

Assim, quando $x = 1990$, $y = 16$.

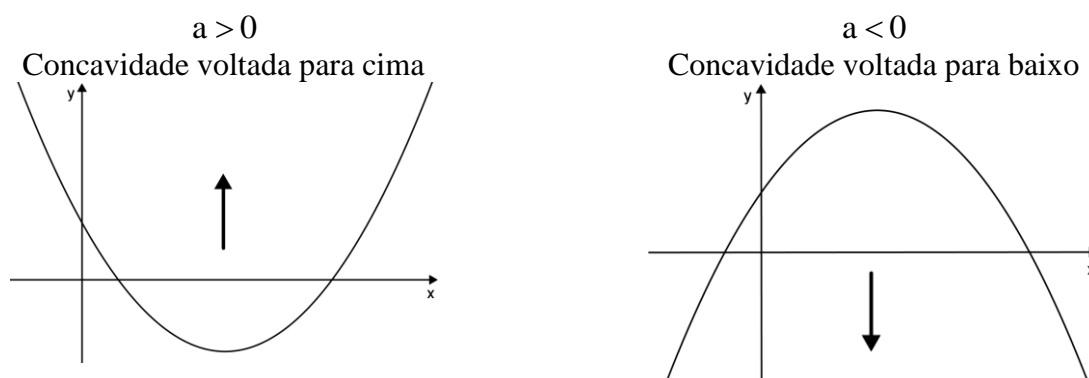
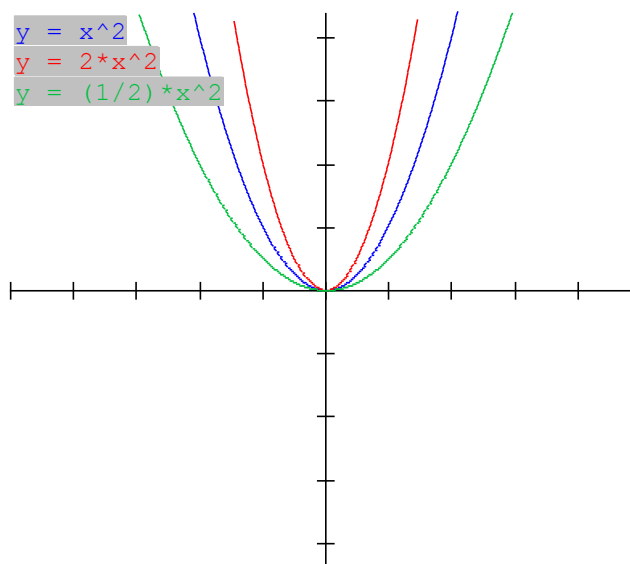
NOTA 1: FUNÇÃO QUADRÁTICA

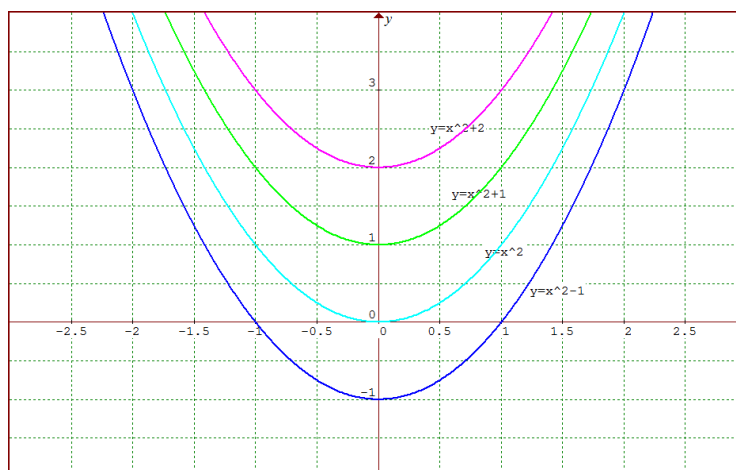
Chama-se função do 2º grau ou quadrática (trinômio do 2° grau), toda função polinomial $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$.

O gráfico da função do 2º grau é uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo das ordenadas Oy.

A parábola representativa da função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ terá concavidade voltada para cima quando $a>0$ e concavidade voltada para baixo quando $a<0$.

$a>0$
Concavidade voltada para cima

$a<0$
Concavidade voltada para baixo

Observe como a variação do valor de a afeta o gráfico da função quadrática.

O ponto em que a parábola corta o eixo das ordenadas é o ponto $(0,c)$.

A variação do valor de c faz com que o gráfico da função quadrática se desloque na vertical.

Zerou ou raízes

Zeros ou raízes são os valores de x reais para os quais $f(x)$ se anula, sendo, portanto, as soluções da equação do 2º grau $ax^2+bx+c=0$ e as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo Ox.

As raízes da função $f(x)=ax^2+bx+c$ são dadas por

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta=b^2-4ac$.

A análise do sinal do discriminante Δ permite identificar o número de raízes reais do trinômio:

Se $\Delta>0$, a função possui duas raízes reais distintas dadas por $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ e intercepta o eixo Ox em dois pontos distintos.

Se $\Delta=0$, a função tem uma raiz real dupla (ou duas raízes reais iguais) dada por $x_{1,2}=\frac{-b}{2a}$ e tangencia o eixo Ox.

Se $\Delta<0$, a função não possui raízes reais e não intercepta o eixo Ox.

Sempre que os coeficientes a e c possuírem sinais contrários, a equação possuirá duas raízes reais distintas.

Quando $\Delta=0$, o trinômio do 2° grau é um trinômio quadrado perfeito, ou seja, é o quadrado de um binômio do 1º grau com coeficientes reais.

Vértice da parábola – máximo e mínimo

Se $a > 0$, $f(x)$ assumirá um valor mínimo $y_{MÍN} = -\frac{\Delta}{4a}$ em $x_{MÍN} = \frac{-b}{2a}$.

Se $a < 0$, $f(x)$ assumirá um valor máximo $y_{MÁX} = -\frac{\Delta}{4a}$ em $x_{MÁX} = \frac{-b}{2a}$.

O valor máximo ou mínimo é obtido substituindo $x = \frac{-b}{2a}$ na função, sendo dado por $f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$.

A expressão acima define o ponto chamado vértice da parábola.

$$V(x_V, y_V) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Isso permite identificar a imagem da função quadrática.

$$a > 0 \Rightarrow \text{Im} = \left[\frac{-\Delta}{4a}, +\infty\right[$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{Im} = \left]-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\right]$$

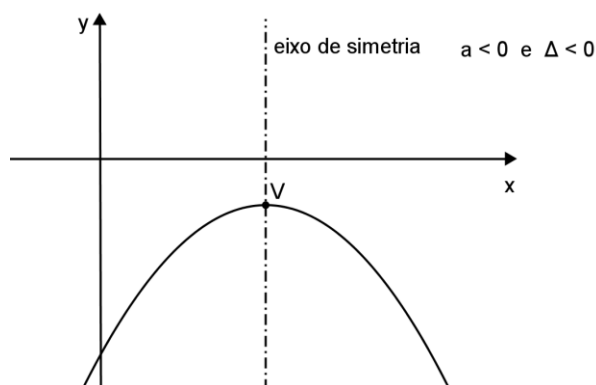
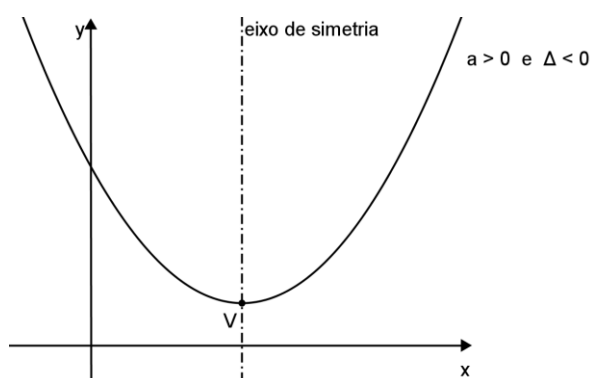
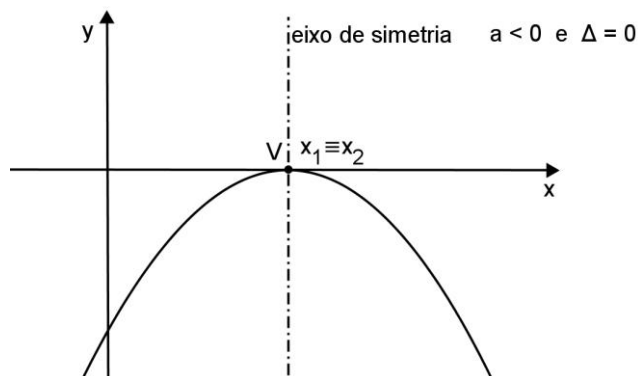
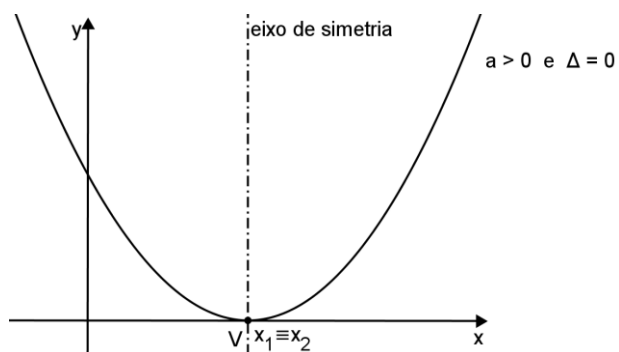
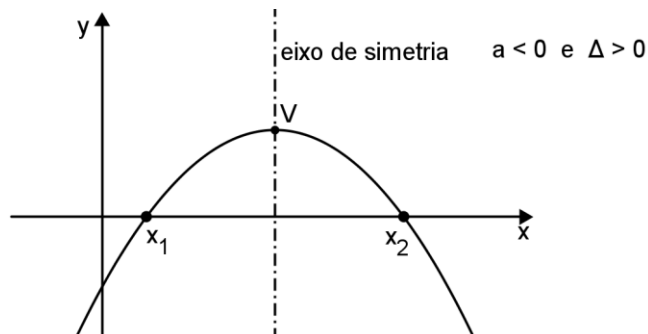
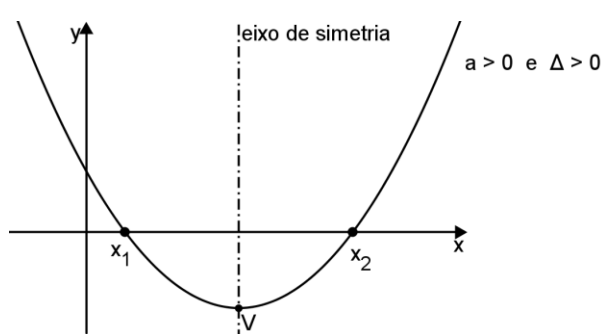
A partir da forma canônica $y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, com $\Delta = b^2 - 4ac$, pode-se concluir que o eixo de simetria da parábola é a reta vertical $x = \frac{-b}{2a}$ que passa pelo vértice.

Isso implica que pontos, cujas abscissas equidistam do vértice, possuem o mesmo valor de ordenada.

$$f(x_V - k) = f(x_V + k), \ \forall k \in \mathbb{R}$$

BIZU DESSA QUESTÃO!!!

Observe ainda que a abscissa do vértice é a média aritmética das raízes: $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Usando as informações acima é possível esboçar o gráfico da função do 2º grau nos diversos casos.

Sinal do trinômio:

A análise dos gráficos da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ acima permite realizar o estudo de sinal do trinômio.

Se $\Delta < 0$, a função tem sempre o mesmo sinal de a.

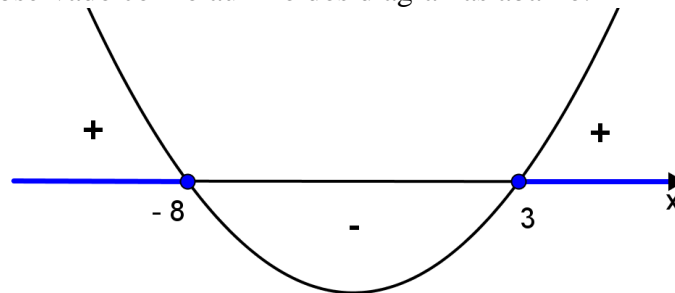
Se $\Delta = 0$, a função é nula em $x = -\frac{b}{2a}$ e tem o mesmo sinal de a nos outros valores de x.

Se $\Delta > 0$, a função tem o sinal de a no intervalo exterior às raízes e sinal contrário ao de a entre as raízes.

Esse estudo de sinais serve de referência para a resolução das inequações do 2º grau.

Exemplo: Para resolver a inequação $x^2+5x-24\geq 0$, basta considerar a função $f(x)=x^2+5x-24$.
O primeiro passo é determinar as suas raízes.

$$\Delta=5^2-4\cdot 1\cdot(-24)=121>0\Rightarrow x_1=\frac{-5-11}{2}=-8\ \wedge\ x_2=\frac{-5+11}{2}=3$$

Como $a=1>0$ a parábola tem concavidade voltada para cima, logo a função será positiva fora das raízes e nula nas raízes e o conjunto solução da inequação será $S=\left]-\infty,-8\right]\cap\left[3,+\infty\right[$.
Isso também pode ser observado com o auxílio dos diagramas abaixo.

****

7) O número de diagonais de um polígono regular P inscrito em um círculo K é 170. Logo
(A) o número de lados de P é ímpar.
(B) P não tem diagonais passando pelo centro de K.
(C) o ângulo externo de P mede 36°.
(D) uma das diagonais de P é o lado do pentágono regular inscrito em K.
(E) o número de lados de P é múltiplo de 3.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Sejam n o número de lados e D o número de diagonais do polígono regular P, então

$$D=\frac{n(n-3)}{2}=170\Leftrightarrow n^2-3n-340=0\Leftrightarrow n=-17\ (\text{não convém})\ \vee\ n=20.$$

Como $n=20$ é um número par, há $\frac{n}{2}=10$ diagonais passando pelo centro de K.

O ângulo central e o ângulo externo de P são $\frac{360^\circ}{n}=\frac{360^\circ}{20}=18^\circ$.

A diagonal determinada por 4 lados consecutivos determina um ângulo central de $4\cdot 18^\circ=72^\circ=\frac{360^\circ}{5}$, logo é igual ao lado do pentágono regular inscrito no círculo K.
Portanto, a opção correta é (D).

8) Qual é o conjunto solução S da inequação: $[(x-1)\cdot(x-2)]^{-1}>[(x-2)\cdot(x-3)]^{-1}$?
(A) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<1\}$

(B) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<1 \text{ ou } 1<x<2\}$

(C) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<1 \text{ ou } 2<x<3\}$

(D) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<2\}$

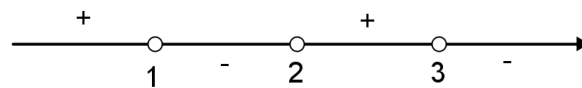
(E) $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2<x<3\}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$[(x-1)\cdot(x-2)]^{-1}>[(x-2)\cdot(x-3)]^{-1}\Leftrightarrow\frac{1}{(x-1)(x-2)}>\frac{1}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}>0\Leftrightarrow\frac{(x-3)-(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)}>0\Leftrightarrow\frac{-2}{(x-1)(x-2)(x-3)}>0$$

Dispondo os três pontos de descontinuidade (raízes do denominador) na reta real, obtemos a figura.

Portanto, pelo método dos intervalos, o conjunto solução é $S=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x<1 \text{ ou } 2<x<3\}$.

9) No algoritmo abaixo, tem-se a decomposição simultânea em fatores primos dos números a, b e c, onde x está substituindo todos os números que são diferentes de a, b, c e 1.

a, b, c	2
a, x, x	2
a, x, x	2
a, x, x	3
x, x, x	3
x, x, x	3
x, x, x	5
x, x, 1	7
1, 1, 1	

Analise as afirmativas abaixo:

I) a certamente é múltiplo de 36.

II) b certamente é múltiplo de 30.

III) c certamente é múltiplo de 35.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas a afirmativa I é falsa.

(B) Apenas a afirmativa II é falsa.

(C) Apenas a afirmativa III é falsa.

(D) Apenas as afirmativas II e III são falsas.

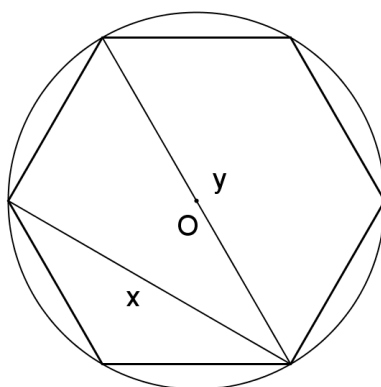
(E) As afirmativas I, II e III são falsas.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Analisando o primeiro fator 2, concluímos que 2 divide b e c, mas não divide a.
Analisando o primeiro fator 3, concluímos que 3 divide a, mas nada podemos afirmar em relação a b e c.
Analisando o fator 5, concluímos que 5 divide c.
Analisando o fator 7, concluímos que 7 divide a e b, mas não divide c.
I) FALSA
Como $2 \nmid a$, então a não é múltiplo de 36.
II) FALSA
Para que b certamente seja múltiplo de 30, precisamos garantir que b seja múltiplo de 2, 3 e 5, mas o algoritmo só permite garantir que b é múltiplo de 2 e 7.
III) FALSA
Como $7 \nmid c$, então c não é múltiplo de 35.

10) Um professor usa para medir comprimentos uma unidade denominada "nix", definida como $1\text{ nix} = \sqrt{3}$ centímetros. Ele mediu na unidade nix as diagonais de um hexágono regular de lado 1 cm e encontrou para as menores x e para as maiores y. Pode-se concluir que x e y são, respectivamente,
(A) números racionais.
(B) números irracionais.
(C) um número inteiro e um número irracional.
(D) um número irracional e um número inteiro.
(E) um número racional não inteiro e um número irracional.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Seja um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio R, conforme a figura abaixo.

A menor diagonal x determina um arco de 120°, logo $x = L_3 = R\sqrt{3}$.
A maior diagonal y é um diâmetro, logo $y = 2R$.

$$1\text{ nix} = \sqrt{3}\text{ cm} \Leftrightarrow 1\text{ cm} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{ nix}$$

O lado do hexágono regular é $L_6 = 1\text{ cm}$, então o raio da circunferência circunscrita ao hexágono é $R = L_6 = 1\text{ cm}$.

$R = 1\,\text{cm} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{nix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 1\,\text{nix} \ \wedge \ y = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{nix}$.

Logo, x e y são, respectivamente, um número inteiro e um número irracional.

11) Observe o sistema linear S.

$$S: \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 9 \\ ax + by = c \end{cases}$$

É correto afirmar, em relação aos parâmetros a, b e c, que

(A) quaisquer que sejam, S será possível e determinado.
(B) existem valores desses parâmetros que tornam S possível e determinado.
(C) quaisquer que sejam, S será possível e indeterminado.
(D) existem valores desses parâmetros que tornam S indeterminado.
(E) quaisquer que sejam, S será impossível.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações, obtemos um sistema possível e determinado.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} -4x + -6y = -14 \\ 9x + 6y = 27 \end{cases} \Rightarrow 5x = 13 \Leftrightarrow x = \frac{13}{5} \Rightarrow 2y = 9 - 3 \cdot \frac{13}{5} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}$$

Assim, se os parâmetros a, b e c são tais que $a \cdot \frac{13}{5} + b \cdot \frac{3}{5} = c$, então o sistema S é possível e determinado. Caso contrário, o sistema S é impossível.

Logo, a alternativa correta é a letra (B).

12)

A	1	3	6	9
B	3	9	18	27
C	3	27	108	243
D	3	2	1	1/3

As linhas da tabela acima mostram a variação de quatro grandezas: A, B, C e D. observa-se, por exemplo, que quando a grandeza A vale 6 as grandezas B, C e D valem, respectivamente, 18, 108 e 1.

Com base nos dados apresentados, analise as afirmativas abaixo.

I − A grandeza A é diretamente proporcional a B.
II − A grandeza A é diretamente proporcional a C.
III − A grandeza A é inversamente proporcional a D.

Assinale a opção correta.

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

(B) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
I – VERDADEIRA, pois $\frac{1}{3}=\frac{3}{9}=\frac{6}{18}=\frac{9}{27}$.
II – FALSA, pois $\frac{1}{3}\neq\frac{3}{27}\neq\frac{6}{108}\neq\frac{9}{243}$.
III – FALSA, pois $\frac{1}{1/3}\neq\frac{3}{1/2}=\frac{6}{1/1}\neq\frac{9}{1/3}$.

13) Um polígono convexo de n lados tem três dos seus ângulos iguais a 83°, 137° e 142°. Qual é o menor valor de n para que nenhum dos outros ângulos desse polígono seja menor que 121°?
(A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 9
(E) 10

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
$S_i=180^\circ\cdot(n-2)\geq 83^\circ+137^\circ+142^\circ+121^\circ\cdot(n-3)\Leftrightarrow 59n\geq 360\Leftrightarrow n\geq 7$
Logo, o menor valor de n é 7.

14) Uma máquina enche um depósito de cereais na razão de seis toneladas por hora. Num determinado dia, essa máquina com a tarefa de encher três depósitos de mesma capacidade encheu o primeiro normalmente, mas apresentou um defeito e encheu os outros dois na razão de três toneladas por hora. Em média, nesse dia quantas toneladas por hora trabalhou essa máquina?
(A) $3,2$
(B) $3,5$
(C) $3,6$
(D) $4,0$
(E) $4,5$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Seja M toneladas a capacidade dos depósitos. A máquina encheu o primeiro depósito em $\frac{M}{6}$ horas e os dois outros em $\frac{M}{3}$ horas cada. Assim, a máquina encheu $3M$ toneladas em $\left(\frac{M}{6}+\frac{M}{3}+\frac{M}{3}\right)=\frac{5M}{6}$ horas, ou seja, trabalhou a razão de $\frac{3M}{5M/6}=3,6\ \text{ton}/\text{h}$.

15) Em quantos meses, no mínimo, um capital aplicado segundo a taxa simples de $0,7\%$ ao mês produz um montante que supera o dobro do seu valor?
(A) 140
(B) 141
(C) 142
(D) 143
(E) 144

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Se o capital inicial C for aplicado a uma taxa de juros simples de $i\%$ ao mês, durante t meses, o montante resultante será $M=C\cdot(1+i\%\cdot t)$.

$$i=0,7\%\Rightarrow M=C\left(1+\frac{0,7}{100}\cdot t\right)$$

$$\frac{M}{C}\geq 2\Rightarrow 1+\frac{7}{1000}\cdot t\geq 2\Leftrightarrow t\geq\frac{1000}{7}\approx 142,8\Rightarrow t_{MIN}=143\ \text{ meses}$$

Logo, o menor número de meses para o qual o montante supera o dobro do capital aplicado é 143.

16) Simplificando-se a fração $\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}$, onde $a>b$, obtém-se
(A) a^2-b^2-2ab
(B) a^2-b^2+2ab
(C) a^2+b^2-2ab
(D) a^2+b^2+2ab
(E) a^2+b^2

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\frac{a^4+b^4-6a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}{a^2-b^2+2ab}=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2-(2ab)^2}{a^2-b^2+2ab}=$$
$$=\frac{\left(a^2-b^2+2ab\right)\left(a^2-b^2-2ab\right)}{a^2-b^2+2ab}=a^2-b^2-2ab$$

17) Num determinado triângulo escaleno ABC, o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a $90º$. Sabe-se que $AB=c$, $AC=b$ e $BC=a$. Internamente ao segmento BC, determina-se o ponto P de modo que $BP=\frac{(c-b)(c+b)}{a}$. O perímetro do triângulo APC é dado pela expressão

(A) $\frac{2b(a+b)}{a}$

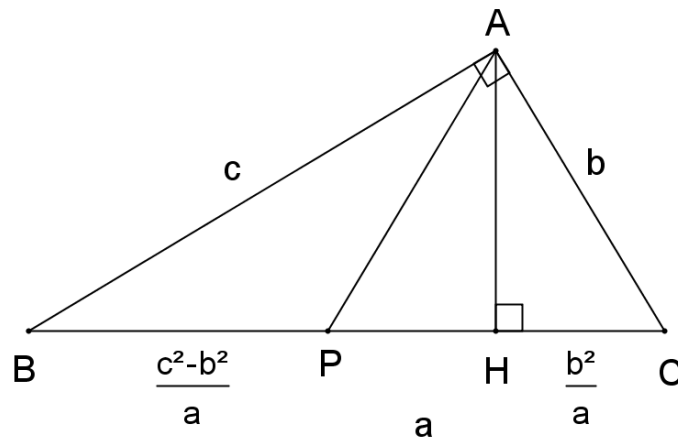
(B) $\frac{2c(a+b)}{a}$

(C) $\frac{2b(b+c)}{a}$

(D) $\frac{2c(b+c)}{a}$

(E) $\frac{2b(a+c)}{a}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Teorema de Pitágoras no ΔABC: $a^2=b^2+c^2$

$$PC=BC-BP=a-\frac{(c-b)(c+b)}{a}=\frac{a^2-c^2+b^2}{a}=\frac{b^2+c^2-c^2+b^2}{a}=\frac{2b^2}{a}$$

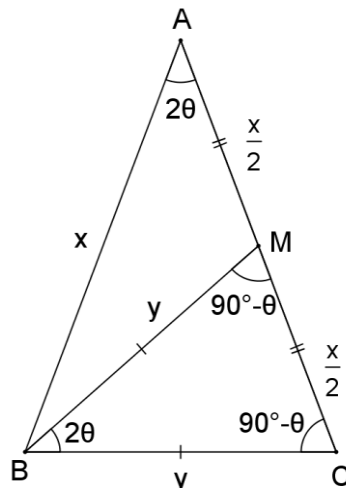
Como $PC=\frac{2b^2}{a}$ e $CH=\frac{b^2}{a}$ (relação métrica no triângulo retângulo), então $PH=CH=\frac{b^2}{a}$.

Assim, AH é altura e mediana do ΔAPC e consequentemente o triângulo é isósceles. Logo, $AP = AC = b$ e o perímetro do ΔAPC é $2b + \frac{2b^2}{a} = \frac{2b(a+b)}{a}$.

18) No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida x e a mediana BM tem a mesma medida y do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{y}$ é um valor compreendido entre:

(A) 0 e 1
(B) 1 e 2
(C) 2 e 3
(D) 3 e 4
(E) 4 e 5

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$B\hat{A}C = 2\theta \;\wedge\; AB = AC = x \Rightarrow A\hat{C}B = A\hat{B}C = 90^\circ - \theta$

$BC = BM = y \Rightarrow B\hat{M}C = B\hat{C}M = 90^\circ - \theta \Rightarrow C\hat{B}M = 180^\circ - 2\cdot(90^\circ - \theta) = 2\theta$

$B\hat{A}C = C\hat{B}M = 2\theta \;\wedge\; A\hat{B}C = B\hat{C}M = 90^\circ - \theta \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BCM$

$\Rightarrow \frac{BC}{CM} = \frac{AC}{BM} \Leftrightarrow \frac{y}{x/2} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2} \Rightarrow 1 < \frac{x}{y} < 2$

19) Uma determinada conta a pagar de valor X vence no dia 30 de novembro, mas, se for paga até o dia 30 de setembro, tem 20% de desconto sobre X e, se for paga até o dia 31 de outubro, tem 10% de desconto sobre X. Alguém reservou o valor exato Y para pagar essa conta no dia 30 de setembro, no entanto esqueceu-se de fazê-lo e só efetuou esse pagamento no dia 31 de outubro. Qual a porcentagem a mais sobre Y que terá de pagar?
(A) 10%
(B) 12,5%

(C) $17,5\%$
(D) 20%
(E) 25%

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
O valor a pagar em 30 de setembro é $Y = X \cdot (1 - 20\%) = 0,8X$.
O valor a pagar em 31 de outubro é $X \cdot (1 - 10\%) = 0,9X$.
A porcentagem a mais sobre Y que terá que ser paga é
$\frac{0,9X - Y}{Y} = \frac{0,9X - 0,8X}{0,8X} = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$.

20) Os números reais positivos a e b satisfazem a igualdade: $a\sqrt{(a^2 + 2b^2)} = b\sqrt{(9a^2 - b^2)}$. Um valor possível para $\frac{a}{b}$ é

(A) $\frac{5 + 2\sqrt{5}}{2}$

(B) $\frac{5 + \sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}$

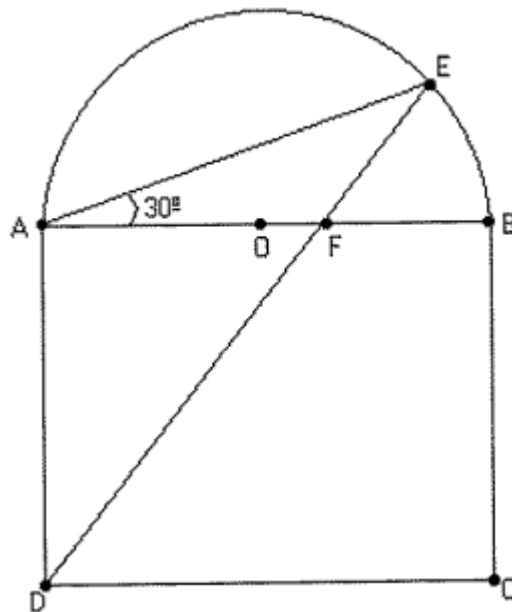
(D) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

(E) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
$a\sqrt{(a^2 + 2b^2)} = b\sqrt{(9a^2 - b^2)} \Rightarrow a^2(a^2 + 2b^2) = b^2(9a^2 - b^2) \Leftrightarrow a^4 - 7a^2b^2 + b^4 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{a^4}{b^4} - 7 \cdot \frac{a^2}{b^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} = \frac{14 \pm 6\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2004/2005

1)

Na figura acima, $ABCD$ é um quadrado de área 104 e o ponto O é o centro do semicírculo de diâmetro AB. A área do triângulo AEF é dada por

(A) $2\left(3\sqrt{3}+3\right)$

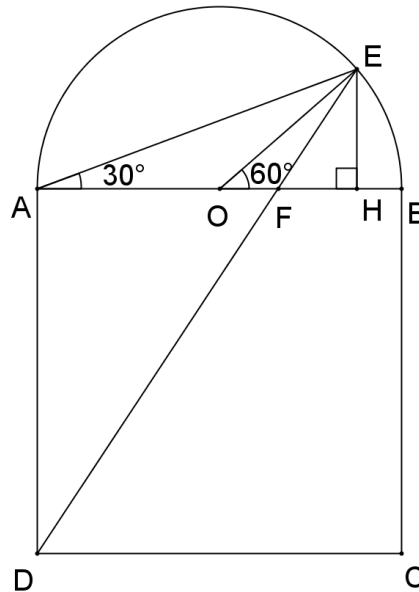
(B) $6\left(4\sqrt{3}-3\right)$

(C) $5\left(4\sqrt{3}-6\right)$

(D) $3\left(4\sqrt{3}-3\right)$

(E) $8\left(4\sqrt{3}-3\right)$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Se $B\hat{A}E = 30^\circ \Rightarrow EB = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow E\hat{O}B = 60^\circ$

Seja $EH \perp AB$, então:

$$EH = OE \cdot \text{sen}\, 60^\circ = \frac{\sqrt{104}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{78}}{2}$$

$$OH = OE \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{104}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$AH = AO + OH = \frac{\sqrt{104}}{2} + \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{3\sqrt{26}}{2}$$

$$\Delta ADF \sim \Delta HEF \Rightarrow \frac{EH}{AD} = \frac{FH}{AF} \Rightarrow \frac{FH}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{78}}{2}}{\sqrt{104}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{AF}{AF + FH} = \frac{4}{4 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AH} = \frac{4}{4 + \sqrt{3}} \Rightarrow AF = \frac{3\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{4}{4 + \sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{26}}{4 + \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{AF \cdot EH}{2} = \frac{\frac{6\sqrt{26}}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{78}}{2}}{2} = \frac{3 \cdot 26 \cdot \sqrt{3}}{2\left(4 + \sqrt{3}\right)} = \frac{39\sqrt{3}\left(4 - \sqrt{3}\right)}{16 - 3} = 3\left(4\sqrt{3} - 3\right) \text{ unidades de área}$$

2) Um certo professor comentou com seus alunos que as dízimas periódicas podem ser representadas por frações em que o numerador e o denominador são números inteiros e, neste momento, o professor perguntou aos alunos o motivo pelo qual existe a parte periódica. Um dos alunos respondeu justificando corretamente, que em qualquer divisão de inteiros:

(A) o quociente é sempre um inteiro.
(B) o resto é sempre um inteiro.
(C) o dividendo é o quociente multiplicado pelo divisor, adicionado ao resto.
(D) os possíveis valores para o resto têm uma quantidade limitada de valores.
(E) que dá origem a uma dízima, os restos são menores que a metade do divisor.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Na divisão inteira de a por b, o resto é um inteiro r tal que $0 \le r \le b-1$. Logo, há uma quantidade limitada de valores para o resto.
Efetuando a divisão (não inteira) de a por b duas coisas podem ocorrer: 1º) encontrar um resto zero, o que indica que o quociente é inteiro ou decimal exato; ou 2º) o resto obtido nunca ser zero, mas como a quantidade de valores possíveis para o resto é limitada, em algum momento o resto repetir-se-á e, consequentemente, a sequência de restos também, resultando numa repetição periódica no quociente, ou seja, o quociente dessa divisão será uma dízima periódica.
Assim, o motivo pelo qual existem as dízimas periódicas é porque os possíveis valores para o resto têm uma quantidade limitada de valores.

3) Um professor de matemática apresentou uma equação do $2°$ grau completa, com duas raízes reais positivas, e mandou calcular as médias: aritmética, geométrica, e harmônica entre essas raízes, sem determiná-las. Nessas condições:
(A) somente foi possível calcular a média aritmética.
(B) somente foi possível calcular as médias aritmética e geométrica.
(C) somente foi possível calcular as médias aritmética e harmônica.
(D) foi possível calcular as três médias pedidas.
(E) não foi possível calcular as três médias pedidas.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Seja a equação do $2°$ grau completa $ax^2+bx+c=0$ de raízes r_1 e r_2 reais e positivas, então sabemos que $r_1+r_2=-\frac{b}{2}$ e $r_1 \cdot r_2=\frac{c}{a}$.

A média aritmética das raízes é $MA=\frac{r_1+r_2}{2}=\frac{-\frac{b}{a}}{2}=-\frac{b}{2a}$, a média geométrica das raízes é $MG=\sqrt{r_1 \cdot r_2}=\sqrt{\frac{c}{a}}$ (observe que como as raízes são positivas a média geométrica é um número real)

e a média harmônica das raízes é $MH=\frac{1}{\frac{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}{2}}=\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}=\frac{2\cdot\frac{c}{a}}{-\frac{b}{a}}=-2\frac{c}{b}$.

Logo, é possível calcular as três médias sem determinar as raízes.

4) Sabendo-se que a equação $x^2(x^2+13)-6x(x^2+2)+4=0$ pode ser escrita como um produto de binômios do primeiro grau, a soma de duas das suas raízes reais distintas é igual a
(A) -3
(B) -2
(C) -1
(D) 2
(E) 3

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
$x^2(x^2+13)-6x(x^2+2)+4=0 \Leftrightarrow x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$
Por inspeção, vemos que 1 é raiz (pois a soma dos coeficientes é zero). Aplicando o algoritmo de Briott-Ruffini, temos:

	1	–6	13	–12	4
1	1	–5	8	–4	0

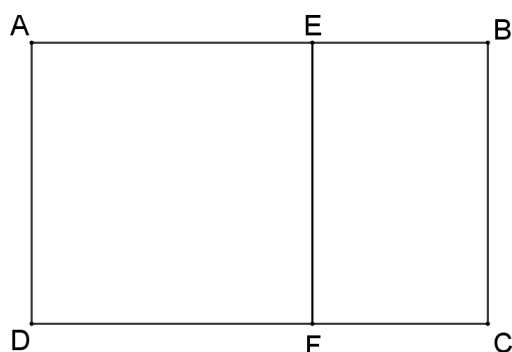
Dessa forma, concluímos que a equação pode ser escrita como $(x-1)(x^3-5x^2+8x-4)=0$.
Inspecionando o fator do terceiro grau, vemos que 2 é raiz. Aplicando novamente o algoritmo de Briott-Ruffini, temos:

	1	–5	8	–4
2	1	–3	2	0

Assim, concluímos que a equação inicial pode ser escrita como $(x-1)(x-2)(x^2-3x+2)=0$.
É fácil ver que o fator do segundo grau possui raízes 1 e 2. Assim, a equação resultante é $(x-1)^2(x-2)^2=0$.
As suas raízes são 1 (dupla) e 2 (dupla), e a soma de duas raízes distintas é $1+2=3$.

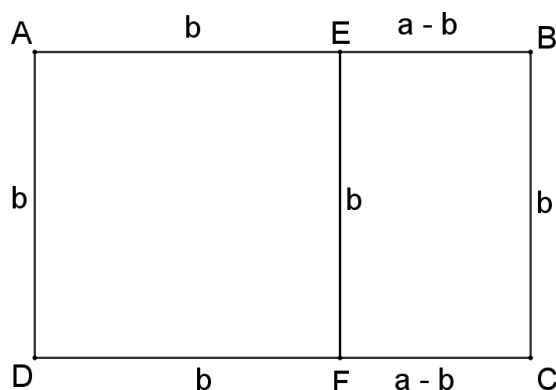
Outra solução pode ser obtida fatorando-se diretamente (se você vir o caminho...).

$$x^2(x^2+13)-6x(x^2+2)+4=0 \Leftrightarrow x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4+9x^2+4-6x^3+4x^2-12x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2)^2+(-3x)^2+2^2+2\cdot(-3x)\cdot x^2+2\cdot x^2\cdot 2+2\cdot(-3x)\cdot 2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)^2=0$$

5)

Um retângulo $ABCD$ de lado $AB = a$ e $BC = b$ $(a > b)$, é dividido, por um segmento EF num quadrado $AEFD$ e num retângulo $EBCF$, semelhante ao retângulo $ABCD$ conforme a figura acima. Nessas condições, a razão entre a e b é aproximadamente igual a:

(A) $1,62$
(B) $2,62$
(C) $3,62$
(D) $4,62$
(E) $5,62$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$$\#EBCF \sim \#ABCD \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{1}{a/b} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $\frac{a}{b} > 0$, então $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,62$.

6) A interseção do conjunto solução, nos reais, da inequação $\frac{(x^2-2x+1)^2}{12x-4} \le 0$ com o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$ é dada por:

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3}\right\}$

(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3}\right\} \cup \{2\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3}\right\} \cup \{1\}$

(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

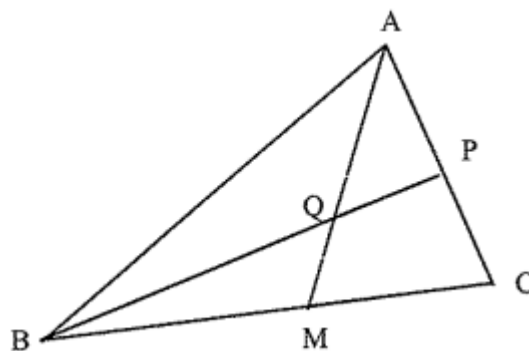
RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Como $\left(x^2-2x+1\right)^2 = \left((x-1)^2\right)^2 = (x-1)^4$, então o numerador da fração é igual a zero quando $x = 1$ e positivo, caso contrário. Logo,

$$\frac{(x^2-2x+1)^2}{12x-4} \le 0 \Leftrightarrow 12x-4<0 \ \vee \ x=1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3} \ \vee \ x=1 \Leftrightarrow S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x<\frac{1}{3}\right\} \cup \{1\}$$

$$S \subset \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} \Rightarrow S \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\} = S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{3}\right\} \cup \{1\}$$

7)

Na figura acima AM e BP são cevianas do triângulo ABC de área S. Sendo $AP = 2 \cdot PC$ e $AQ = 3 \cdot QM$, qual é o valor da área do triângulo determinado pelos pontos P, Q e M, em função de S?

(A) $\frac{S}{16}$

(B) $\frac{S}{18}$

(C) $\frac{S}{20}$

(D) $\frac{S}{21}$

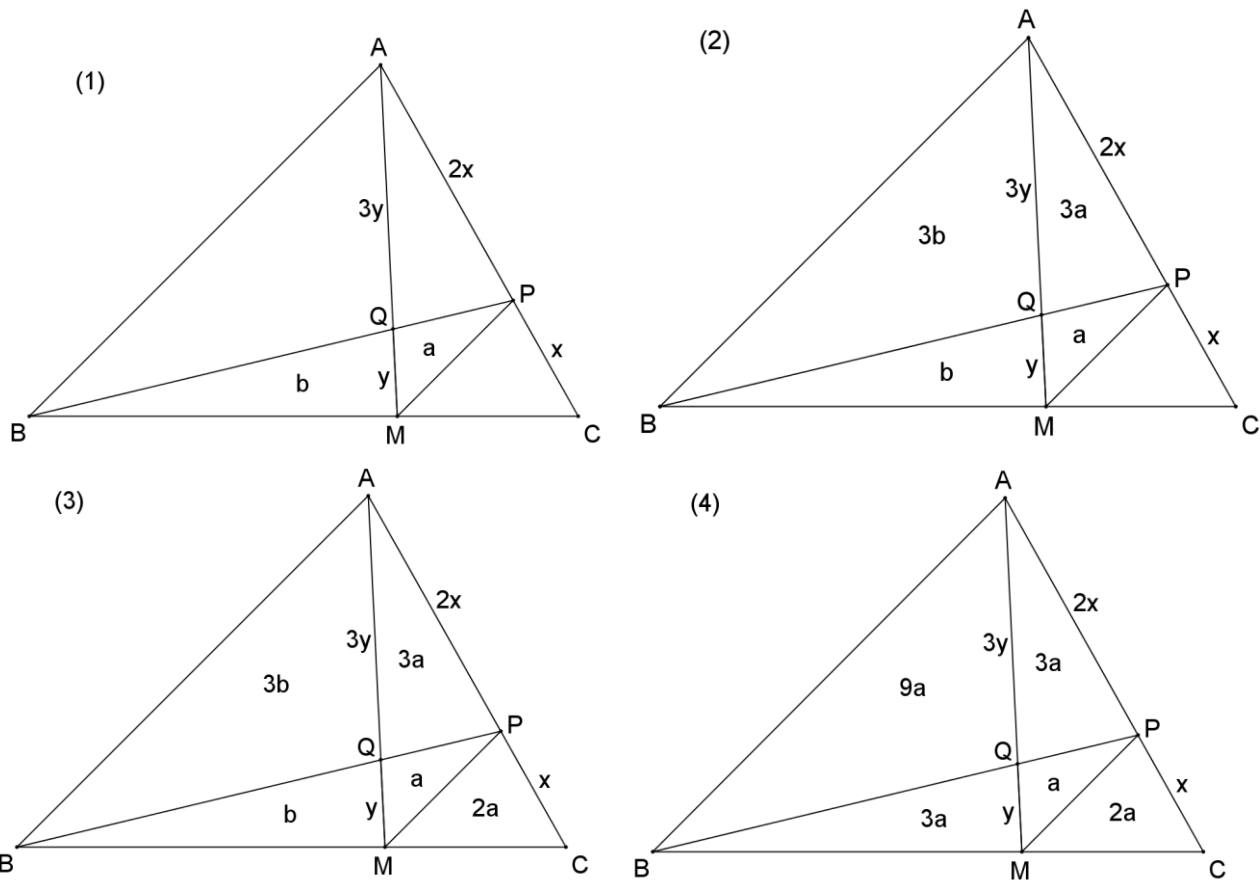
(E) $\frac{S}{24}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$AP = 2 \cdot PC \Rightarrow PC = x \ \wedge \ AP = 2x$

$AQ = 3 \cdot QM \Rightarrow QM = y \ \wedge \ AQ = 3y$

Na figura abaixo, vamos supor $S_{PQM} = a$ e $S_{BQM} = b$. A partir daí, vamos encontrar a área dos outros triângulos utilizando o fato de que a razão entre as áreas de triângulos de mesma altura é igual à razão entre suas bases.

Na figura (3), temos: $\frac{S_{ABP}}{S_{CBP}} = \frac{AP}{PC} \Leftrightarrow \frac{3a+3b}{3a+b} = \frac{2x}{x} \Leftrightarrow 3a + 3b = 6a + 2b \Leftrightarrow b = 3a$.

Na figura (4), temos: $S_{ABC} = S = 18a \Rightarrow S_{PQM} = a = \frac{S}{18}$.

Note que fizemos uma sequência de figuras para facilitar a compreensão, mas o estudante pode realizar todo o procedimento numa única figura.

Uma solução alternativa pode ser feita com auxílio do teorema de Menelaus.

Aplicando o teorema de Menelaus com o ΔAMC e a secante BQP, temos:

$\frac{AQ}{MQ}\cdot\frac{CP}{AP}\cdot\frac{MB}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{MB}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{MB}{CB}=\frac{2}{3}$

$\frac{S_{AMC}}{S_{ABC}}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{AMC}=\frac{S}{3}$

$\frac{S_{BCP}}{S_{ABC}}=\frac{CP}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{BCP}=\frac{S}{3}$

$\frac{S_{PMC}}{S_{BCP}}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{PMC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{S}{3}=\frac{S}{9}$

$\frac{S_{AQP}}{S_{AMC}}=\frac{AQ\cdot AP}{AM\cdot AC}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 3}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{AQP}=\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{3}=\frac{S}{6}$

$S_{MPQ}=S_{AMC}-S_{AQP}-S_{PMC}=\frac{S}{3}-\frac{S}{6}-\frac{S}{9}=\frac{6S-3S-2S}{18}=\frac{S}{18}$

Note que as relações entre as áreas descritas acima também poderiam ser representadas na figura para agilizar a solução.

Outra maneira de resolver a questão é aplicar duas vezes o teorema de Menelaus.
Aplicando o teorema de Menelaus com o ΔAMC e a secante BQP, temos:

$\frac{AQ}{MQ}\cdot\frac{CP}{AP}\cdot\frac{MB}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{MB}{CB}=1\Leftrightarrow\frac{MB}{CB}=\frac{2}{3}$

Aplicando o teorema de Menelaus com o ΔBCP e a secante AQM, temos:

$\frac{BM}{CM}\cdot\frac{PQ}{BQ}\cdot\frac{CA}{PA}=1\Leftrightarrow\frac{2}{1}\cdot\frac{PQ}{BQ}\cdot\frac{3}{2}=1\Leftrightarrow\frac{PQ}{BQ}=\frac{1}{3}$

$\frac{S_{BCP}}{S_{ABC}}=\frac{CP}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{BCP}=\frac{S}{3}$

$\frac{S_{PMB}}{S_{BCP}}=\frac{MB}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow S_{PMB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{S}{3}=\frac{2S}{9}$

$\frac{S_{MPQ}}{S_{PMB}}=\frac{PQ}{PB}=\frac{1}{4}\Rightarrow S_{MPQ}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2S}{9}=\frac{S}{18}$

8) Considere o triângulo escaleno ABC e os pontos P e Q pertencentes ao plano de ABC e exteriores a esse triângulo.
Se: as medidas dos ângulos PAC e QBC são iguais; as medidas dos ângulos PCA e QCB são iguais; M é o ponto médio de AC; N é o ponto médio de BC; S_1 é a área do triangulo PAM; S_2 é a área do triangulo QBN; S_3 é a área do triangulo PMC; e S_4 é a área do triangulo QNC, analise as afirmativas:

I. S_1 está para S_4, assim como S_3 está para S_2.

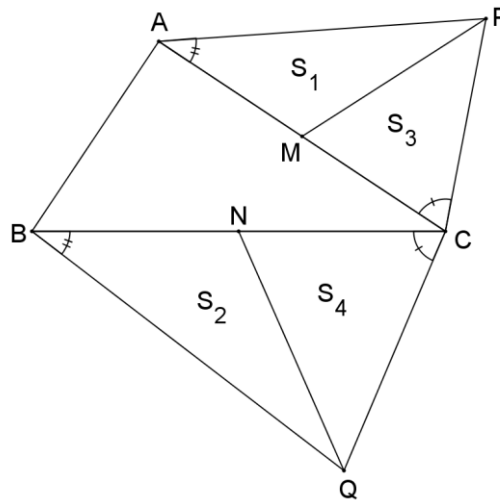
II. S_1 está para S_2, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$.

III. S_1 está para S_3, assim como S_2 está para S_4.

Logo pode-se concluir, corretamente, que:
(A) apenas a afirmativa I é verdadeira.

(B) apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(C) apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(D) apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(E) as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.

$P\hat{A}C = Q\hat{B}C \wedge P\hat{C}A = Q\hat{C}B \Rightarrow \Delta PAC \sim \Delta QBC$

$\Rightarrow \frac{PA}{QB} = \frac{AC}{BC} = \frac{PC}{QC} = \frac{PM}{QN} = k \Rightarrow \frac{S_{PAC}}{S_{QBC}} = k^2$

Note que $\frac{PM}{QN}$ também é igual à razão de semelhança, pois PM e PN são segmentos homólogos nos dois triângulos semelhantes (ambos são medianas relativas a lados correspondentes).

$AM = MC \Rightarrow S_1 = S_3 = \frac{S_{PAC}}{2}$

$BN = CN \Rightarrow S_2 = S_4 = \frac{S_{QBC}}{2}$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_4} = \frac{S_3}{S_2}$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_{PAC}/2}{S_{QBC}/2} = \frac{S_{PAC}}{S_{QBC}} = \left(\frac{PM}{QN}\right)^2 = \frac{(PM)^2}{(QN)^2}$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_3} = 1 = \frac{S_2}{S_4}$

I. S_1 está para S_4, assim como S_3 está para S_2. (VERDADEIRA)

II. S_1 está para S_2, assim como $(PM)^2$ está para $(QN)^2$. (VERDADEIRA)

III. S_1 está para S_3, assim como S_2 está para S_4. (VERDADEIRA)

9) Uma máquina é capaz de fabricar, ligada durante um tempo inteiro de minutos T, 3^T peças, sendo que 20% delas são defeituosas. Para obter-se, no mínimo, 605 peças perfeitas essa máquina deverá funcionar quantos minutos?
(A) 4
(B) 5
(C) 6
(D) 7
(E) 8

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
A quantidade de peças perfeitas fabricadas em T minutos é $(100\%-20\%)\cdot 3^T = 80\%\cdot 3^T$. Assim, devemos ter

$$80\%\cdot 3^T \geq 605 \Leftrightarrow \frac{8}{10}\cdot 3^T \geq 605 \Rightarrow 3^T \geq 756,25$$

Como $3^6 = 729$ e $3^7 = 2187$, então $T_{MIN} = 7$ minutos, ou seja, a máquina deve funcionar pelo menos 7 minutos para se obter 605 peças perfeitas.

10) Um número natural N tem 2005 divisores positivos. O número de bases distintas da sua decomposição em fatores primos pode ser
(A) um
(B) cinco
(C) três
(D) quatro
(E) seis

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
A decomposição de 2005 em fatores primos é $2005 = 5\cdot 401$.
Logo, existem duas possibilidades para a forma de N:
1° caso: $N = {p_1}^4\cdot {p_2}^{400}$, onde p_1 e p_2 são números primos distintos, pois $d(N) = (4+1)(400+1) = 2005$.
2° caso: $N = {p_1}^{2004}$, pois $d(N) = (2004+1) = 2005$.
Logo, o número de bases distintas pode ser 1 ou 2.

Observação: Esse enunciado sofreu uma pequena alteração, pois na prova original havia um e dois dentre as alternativas e a questão teve gabarito duplo.

11) (CN 2005) Um aluno resolvendo uma questão de múltipla escolha chegou ao seguinte resultado $\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}}$, no entanto as opções estavam em números decimais e pedia-se a mais próxima do valor encontrado para resultado, e, assim sendo, procurou simplificar esse resultado, a fim de melhor estimar a resposta. Percebendo que o radicando da raiz de índice 4 é quarta potência de uma soma de dois radicais simples, concluiu, com maior facilidade, que a opção para a resposta foi

(A) $3,00$
(B) $3,05$
(C) $3,15$
(D) $3,25$
(E) $3,35$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} = \sqrt[4]{5^2+\left(2\sqrt{6}\right)^2+2\cdot 5\cdot 2\sqrt{6}} = \sqrt[4]{\left(5+2\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt[4]{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt[4]{\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2\right)^2} = \sqrt[4]{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4} = \sqrt{3}+\sqrt{2} \approx 1,73+1,41 = 3,14$$

O problema pode ser resolvido também com o auxílio da fórmula de simplificação de radicais duplos: $\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$, onde $C=\sqrt{A^2-B}$.

$$\sqrt[4]{49+20\sqrt{6}} = \sqrt{\sqrt{49+20\sqrt{6}}} = \sqrt{5+\sqrt{24}} \overset{(**)}{=} \sqrt{\frac{5+1}{2}} + \sqrt{\frac{5-1}{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2} \approx 1,73+1,41 = 3,14$$

$$\sqrt{49+20\sqrt{6}} = \sqrt{49+\sqrt{2400}} \overset{(*)}{=} \sqrt{\frac{49+1}{2}} + \sqrt{\frac{49-1}{2}} = \sqrt{25}+\sqrt{24} = 5+\sqrt{24}$$

$(*)$ $C_1 = \sqrt{49^2-2400} = \sqrt{1} = 1$; $(**)$ $C_2 = \sqrt{5^2-24} = \sqrt{1} = 1$

12) Se $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ e $\underline{d}$ são números reais <u>não</u> nulos tais que $ad^2+bc^2=0$. Pode-se afirmar que:

(A) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$; $b+d\neq 0$
(B) $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}$; $c+d\neq 0$
(C) $\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c+d}$; $c+d\neq 0$
(D) $\frac{c}{a}+\frac{b}{d}=\frac{b+c}{a+d}$; $a+d\neq 0$
(E) $\frac{c}{b}+\frac{d}{a}=\frac{c+d}{a+b}$; $a+d\neq 0$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}-\frac{a+b}{c+d}=\frac{ad(c+d)+bc(c+d)-cd(a+b)}{cd(c+d)}=\frac{acd+ad^2+bc^2+bcd-acd-bcd}{cd(c+d)}=$$

$$=\frac{ad^2+bc^2}{cd(c+d)}=\frac{0}{cd(c+d)}=0\Leftrightarrow\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}\text{; onde } c+d\neq 0.$$

Note que não há um caminho imediato para, saindo da expressão dada no enunciado, obter a alternativa correta. Assim, a estratégia é testar as alternativas e verificar qual das igualdades é satisfeita dada a expressão do enunciado.
Nesse processo é interessante observar que, ao testar a opção a), verificamos que ela seria correta se a expressão dada fosse $ad^2+b^2c=0$, o que indica que uma expressão similar invertendo-se b e c provavelmente estaria correta. Isso é exatamente o que aparece na opção b) que, como mostramos acima, está correta.

13) Um número natural N deixa: resto 2 quando dividido por 3; resto 3 quando dividido por 7; e resto 19 quando dividido por 41. Qual é o resto da divisão do número $k=(N+1)\cdot(N+4)\cdot(N+22)$ por 861?
(A) 0
(B) 13
(C) 19
(D) 33
(E) 43

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$N\equiv 2(\text{mod}\,3)\Leftrightarrow N+1\equiv 3\equiv 0(\text{mod}\,3)\Rightarrow 3\,|\,(N+1)$

$N\equiv 3(\text{mod}\,7)\Leftrightarrow N+4\equiv 7\equiv 0(\text{mod}\,7)\Rightarrow 7\,|\,(N+4)$

$N\equiv 19(\text{mod}\,41)\Leftrightarrow N+22\equiv 41\equiv 0(\text{mod}\,41)\Rightarrow 41\,|\,(N+22)$

$\Rightarrow 3\cdot 7\cdot 41=861\,|\,(N+1)\cdot(N+4)\cdot(N+22)=k$

Logo, o resto da divisão de $k=(N+1)\cdot(N+4)\cdot(N+22)$ por 861 é 0.

14) Uma herança P foi dividida por dois herdeiros, com idades, respectivamente, iguais a n e m, em partes proporcionais ao quadrado de suas idades. Qual foi a parte da herança recebida pelo herdeiro de idade n?
(A) $\frac{P^2n}{m^2+n^2}$
(B) $\frac{Pn^2}{m^2+n^2}$

(C) $\dfrac{P^2n^2}{m^2+n^2}$

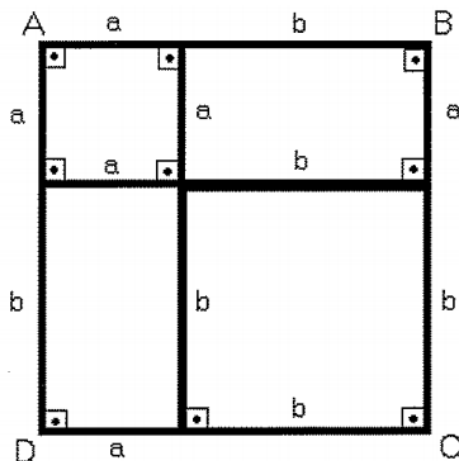
(D) $\dfrac{Pn^2m}{m^2+n^2}$

(E) $\dfrac{P^2n^2m}{m^2+n^2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Sejam x a parte do herdeiro de idade n e y a parte do herdeiro de idade m, então

$$\frac{x}{n^2}=\frac{y}{m^2}=\frac{x+y}{m^2+n^2}=\frac{P}{m^2+n^2}\Rightarrow x=\frac{P\cdot n^2}{m^2+n^2}$$

15)

Qual é o produto notável representado, geometricamente, na figura acima, na qual $ABCD$ é um retângulo?

(A) a^3+b^3

(B) $(a+b)^3$

(C) $(a+b)^2$

(D) $(a^2+b^2)^2$

(E) $(a+b)^4$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A área do quadrado maior é igual à área dos dois quadrados menores somadas às áreas dos dois retângulos. Assim, $(a+b)^2=a^2+b^2+ab+ab=a^2+b^2+2ab$.

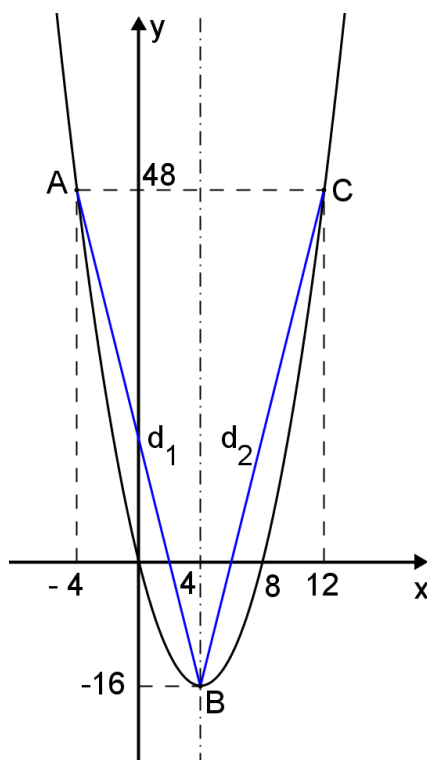
16) O valor numérico da expressão $120k^4 + 10k^2 + 8$, sendo $\underline{k}$ pertencente ao conjunto dos números naturais, é o quadrado de um numero natural para:
(A) somente um único valor de $\underline{k}$.
(B) somente dois valores de $\underline{k}$.
(C) somente valores de $\underline{k}$ múltiplos de 13.
(D) somente valores de $\underline{k}$ múltiplos de 18.
(E) nenhum valor de $\underline{k}$.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O algarismo das unidades de um quadrado perfeito pode ser 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.
O algarismo das unidades de $120k^4 + 10k^2 + 8$, onde $k \in \mathbb{N}$, é 8, então o valor numérico da expressão não é um quadrado perfeito para nenhum valor natural de k.

17) Considere os pontos A, B e C pertencentes ao gráfico do trinômio do segundo grau definido por $y = x^2 - 8x$. Se: a abscissa do ponto A é -4; B é o vértice; a abscissa do ponto C é 12; o segmento AB tem medida d_1; e o segmento BC tem medida d_2, pode-se afirmar que
(A) $d_1 + d_2 < 48$
(B) $48 < d_1 + d_2 < 64$
(C) $64 < d_1 + d_2 < 72$
(D) $72 < d_1 + d_2 < 128$
(E) $d_1 + d_2 > 128$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Como B é o vértice, sua abscissa é $x_B = \frac{-(-8)}{2} = 4$ e sua ordenada é $y_B = 4^2 - 8 \cdot 4 = -16$.

A reta $x = x_B = 4$ é o eixo de simetria da parábola. Como $x_B - x_A = x_C - x_B = 8$, então os pontos A e C possuem as mesmas ordenadas, ou seja, $y_A = y_C \Rightarrow d_1 = d_2$.

$y_A = (-4)^2 - 8 \cdot (-4) = 48$

Teorema de Pitágoras: $d_1 = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4-4)^2 + (48-(-16))^2} = \sqrt{4160}$

$\Rightarrow d_1 + d_2 = 2\sqrt{4160} = 16\sqrt{65} > 16\sqrt{64} = 128 \Rightarrow d_1 + d_2 > 128$

Alternativamente, poderíamos ter calculado também a ordenada do ponto C e a distância $d_2 = BC$.
Como $x_C = 12$, temos $y_C = 12^2 - 8 \cdot 12 = 144 - 96 = 48$ e

$d_2 = BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(12-4)^2 + (48-(-16))^2} = \sqrt{4160}$.

Note que na solução do problema, utilizamos a simetria do gráfico da função quadrática em relação à reta vertical passando pelo vértice. Dessa forma, pontos, cujas abscissas equidistam da abscissa do vértice, possuem a mesma ordenada.

18) Dado um triângulo retângulo, seja $\underline{P}$ o ponto do plano do triângulo equidistante dos vértices. As distâncias de $\underline{P}$ aos catetos do triangulo são $\underline{K}$ e $\underline{L}$. O raio do círculo circunscrito ao triângulo é dado por:

(A) $\frac{K+L}{4}$

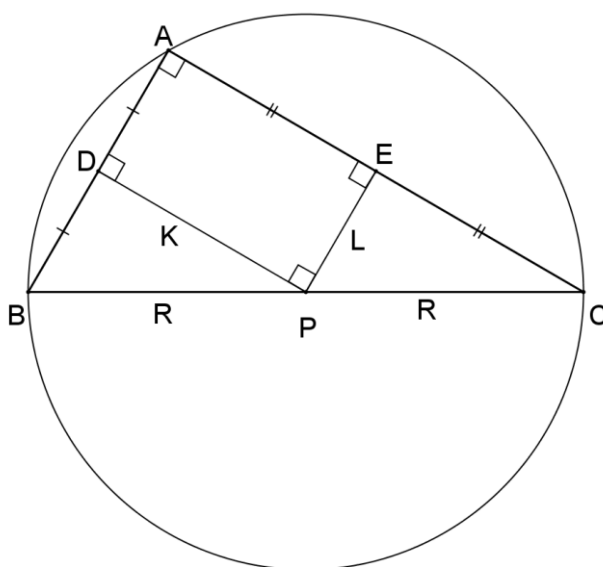
(B) $2K+L$

(C) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{K^2+L^2}}{2}$

(E) $\sqrt{K^2+L^2}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
O ponto do plano que equidista dos vértices de um triângulo é o seu circuncentro (ponto de encontro das mediatrizes). No caso do triângulo retângulo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa.

A figura acima representa a situação descrita no enunciado, onde P é o centro do círculo circunscrito ao triângulo e o quadrilátero $ADPE$ é um retângulo.
A perpendicular a uma corda a partir do centro do círculo divide a corda ao meio (basta observar que ela será altura do triângulo isósceles formado pelos raios).
$PD \perp AB \Leftrightarrow BD = DA = PE = L$
$PE \perp AC \Leftrightarrow EC = AE = DP = K$
Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔBDP, temos:
$BP^2 = BD^2 + DP^2 \Leftrightarrow R^2 = L^2 + K^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{L^2 + K^2}$.

Outra forma de concluir que as perpendiculares PD e PE aos catetos do triângulo passam pelos seus pontos médios é observar que, como P é o circuncentro do triângulo, PD e PE são as mediatrizes dos catetos.

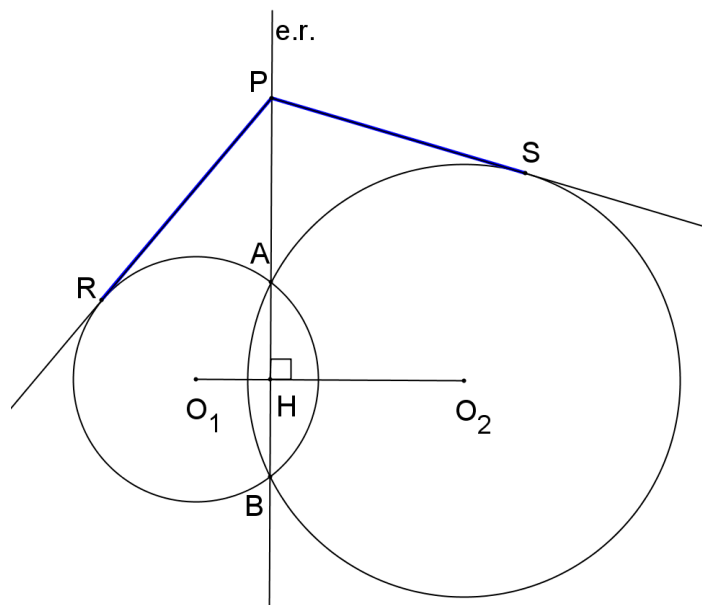
19) Dada a equação na variável real x: $7x - \frac{3}{x} = k$, pode-se concluir, em função do parâmetro real k, que essa equação:
(A) tem raízes reais só se k for um número positivo.
(B) tem raízes reais só se k for um número negativo.
(C) tem raízes reais para qualquer valor de k.
(D) tem raízes reais somente para dois valores de k.
(E) nunca terá raízes reais.

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, cabe observar que $x \neq 0$.
$7x - \frac{3}{x} = k \Leftrightarrow 7x^2 - kx - 3 = 0$
$\Delta = (-k)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-3) = k^2 + 84$
$k^2 \geq 0, \ \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta = k^2 + 84 > 0, \ \forall k \in \mathbb{R}$
Como $\Delta > 0$ para qualquer valor de k, então a equação possui duas raízes reais para qualquer valor de k.

20) Sejam $L1$ e $L2$ duas circunferências fixas de raios diferentes, que se cortam em A e B. P é um ponto variável exterior às circunferências (no mesmo plano). De P traçam-se retas tangentes à $L1$ e $L2$, cujos pontos de contato são R e S. Se $PR = PS$, pode-se afirmar que P, A e B
(A) estão sempre alinhados.
(B) estão alinhados somente em duas posições.
(C) estão alinhados somente em três posições.
(D) estão alinhados somente em quatro posições.
(E) nunca estarão alinhados.

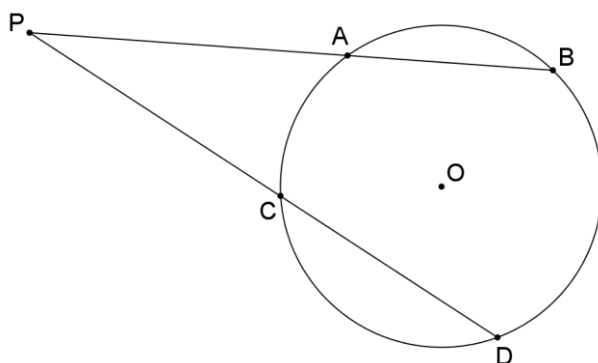
RESPOSTA: A

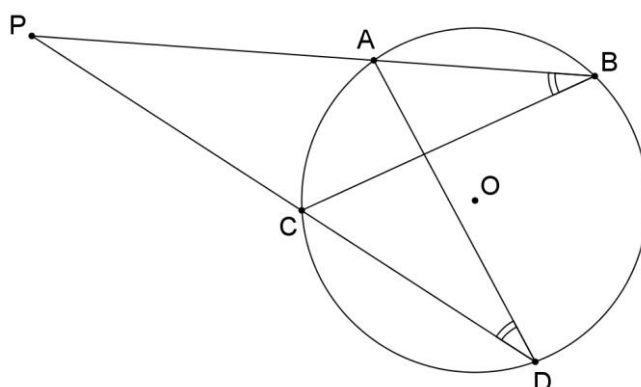
RESOLUÇÃO:

Se $PR = PS$, então o ponto P tem a mesma potência em relação às circunferências $L1$ e $L2$. Logo, P pertence ao eixo radical de $L1$ e $L2$, que é uma reta que passa por A e B. Daí, conclui-se que P, A e B estão sempre alinhados.

Isso pode ser provado usando-se redução ao absurdo, como segue:
Supondo que P, A e B não estão alinhados, então podemos dizer que a reta PA também cruza $L1$ no ponto X e $L2$ no ponto Y, com $X \neq Y$ e não coincidentes com B.
Considerando a potência do ponto P em relação a $L1$, temos: $PR^2 = PX \cdot PA$.
Considerando a potência do ponto P em relação a $L2$, temos: $PS^2 = PY \cdot PA$.
$PR = PS \Rightarrow PX \cdot PA = PY \cdot PA \Leftrightarrow PX = PY \Leftrightarrow X \equiv Y$ (absurdo)
Logo, conclui-se que P, A e B estão sempre alinhados.

NOTA 2: POTÊNCIA DE PONTO E EIXO RADICAL

Potência de ponto exterior

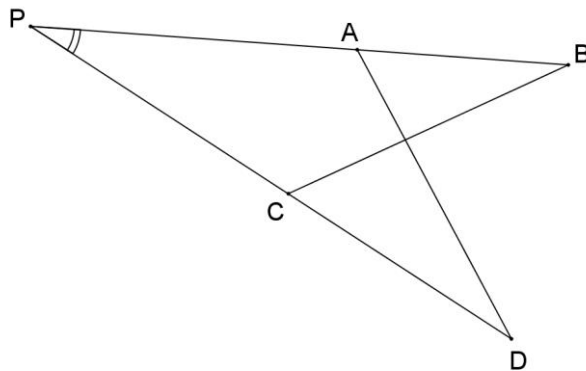
Se por um ponto P exterior a uma circunferência são traçadas duas secantes $\overline{PAB}$ e $\overline{PCD}$ a essa circunferência, então

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Demonstração:

Traçando $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, temos $P\hat{B}C = P\hat{D}A = \frac{AC}{2}$.

Como $P\hat{B}C = P\hat{D}A$ e $B\hat{P}D$ é comum aos dois triângulos, então $\Delta PBC \sim \Delta PDA$.

Logo, $\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$ C.Q.D..

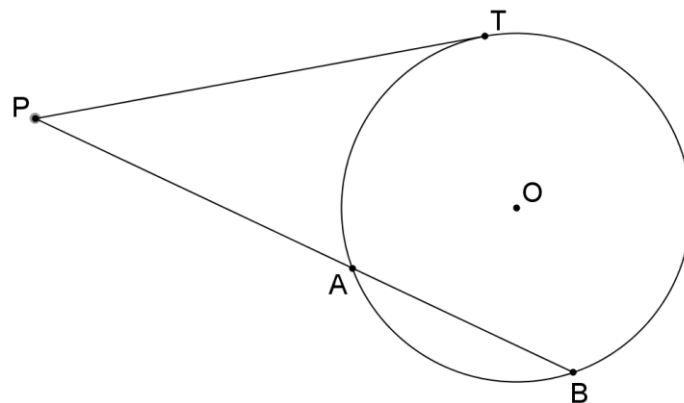
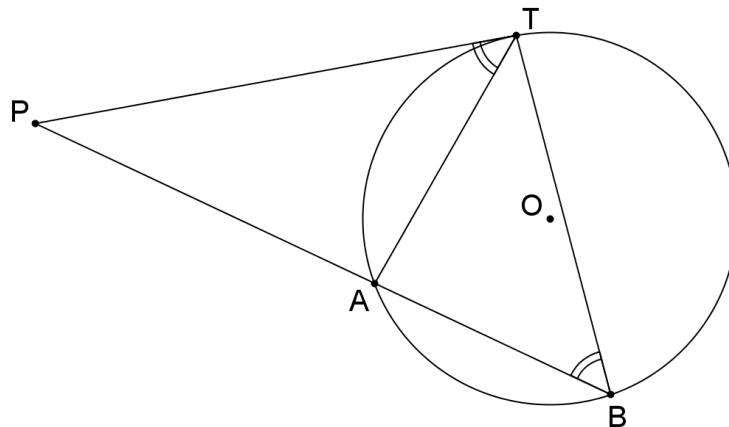
Sejam dois segmentos de reta PB e PD de origem comum e os pontos $A \in PB$ e $C \in PD$ tais que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, então os pontos A, B, C e D são concíclicos.

Demonstração:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Leftrightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ e $A\hat{P}D = C\hat{P}B$ (comum)

$\Rightarrow \Delta APD \sim \Delta CPB \Rightarrow A\hat{D}P = C\hat{B}P = \theta$

Portanto, os pontos B e D estão em um arco capaz de θ sobre o segmento AC, o que implica que os pontos A, B, C e D são concíclicos (C.Q.D.).

Se por um ponto P exterior a uma circunferência são traçadas uma secante $\overline{PAB}$ e uma tangente $\overline{PT}$ a essa circunferência, então

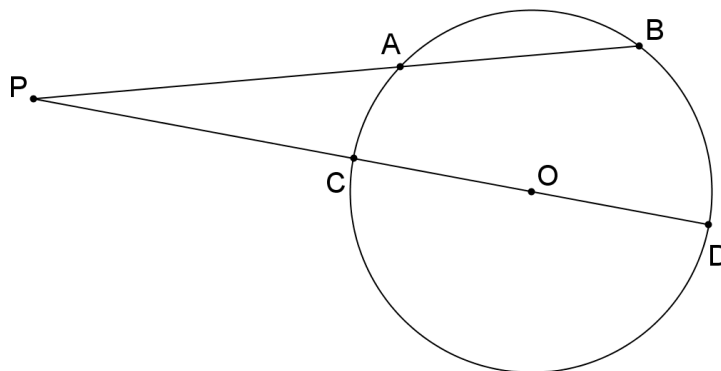
$$PT^2 = PA \cdot PB.$$

Demonstração:

Traçando $\overline{BT}$ e $\overline{AT}$, temos $P\hat{B}T = P\hat{T}A = \frac{AT}{2}$.

Como $P\hat{B}T = P\hat{T}A$ e $B\hat{P}T$ é comum aos dois triângulos, então $\Delta PBT \sim \Delta PTA$.

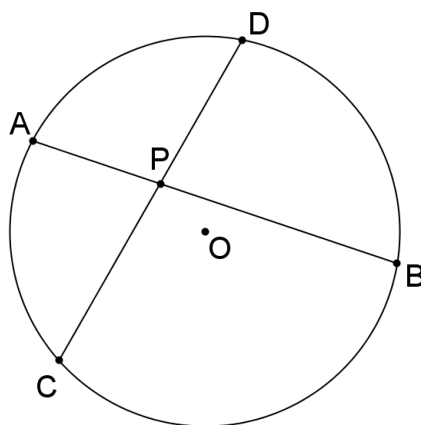
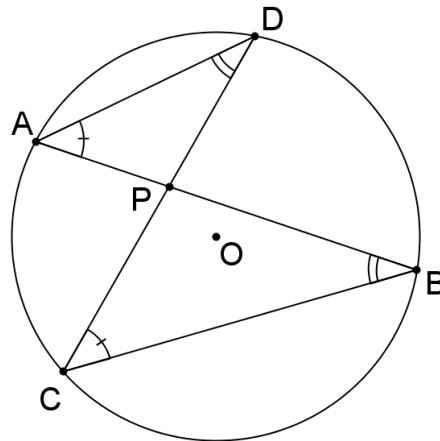
Logo, $\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Leftrightarrow PT^2 = PA \cdot PB$ C.Q.D..

Se por um ponto P exterior a uma circunferência de raio R e distante d unidades de seu centro $(d > R)$ é traçada uma secante $\overline{PAB}$ a essa circunferência, então

$PA \cdot PB = d^2 - R^2$.

Demonstração:

Na figura, temos: $PO = d$, $PC = PO - CO = d - R$ e $PD = PO + OD = d + R$.
Pelo teorema anterior aplicável a duas secantes, temos:
$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (d - R) \cdot (d + R) \Leftrightarrow PA \cdot PB = d^2 - R^2$

Potência de ponto interior

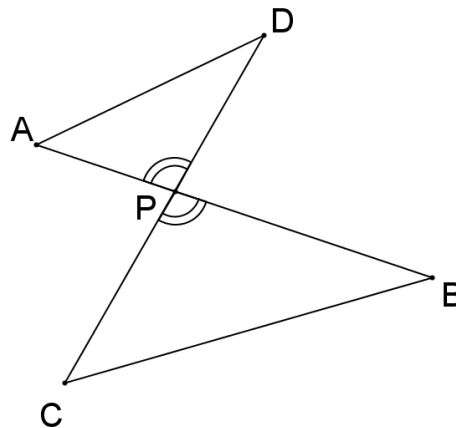
Se por um ponto P interior a uma circunferência são traçadas duas cordas $\overline{APB}$ e $\overline{CPD}$ nessa circunferência, então

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Demonstração:

Tracemos as cordas $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

$B\hat{A}D = B\hat{C}D = \frac{BD}{2} \wedge A\hat{B}C = A\hat{D}C = \frac{AC}{2}$

$\Rightarrow \Delta PAD \sim \Delta PCB \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Leftrightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$ C.Q.D.

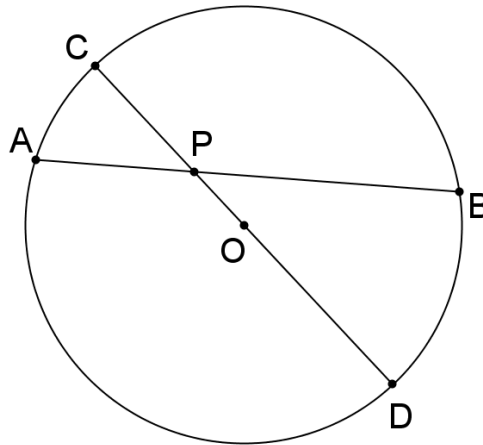
Sejam dois segmentos de reta AB e CD que se cruzam em um ponto P tal que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, então os pontos A, B, C e D são concíclicos.

Demonstração:

$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Leftrightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ e $A\hat{P}D = C\hat{P}B$

$\Rightarrow \Delta APD \sim \Delta CPB \Rightarrow B\hat{A}D = B\hat{C}D \wedge A\hat{D}C = A\hat{B}C$

Como $B\hat{A}D = B\hat{C}D = \theta$, então os pontos A e C pertencem a um arco capaz de θ sobre BD. Portanto, os pontos A, B, C e D são concíclicos (C.Q.D.).

Se por um ponto P interior a uma circunferência de raio R e distante d unidades de seu centro $(d < R)$ é traçada uma corda $\overline{APB}$ nessa circunferência, então $PA \cdot PB = R^2 - d^2$.

Demonstração:

Na figura, temos: $PO = d$, $PC = CO - PO = R - d$ e $PD = PO + OD = d + R$.
Pelo teorema anterior aplicável a duas cordas, temos:

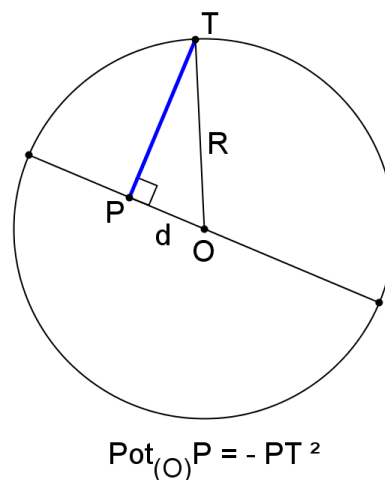
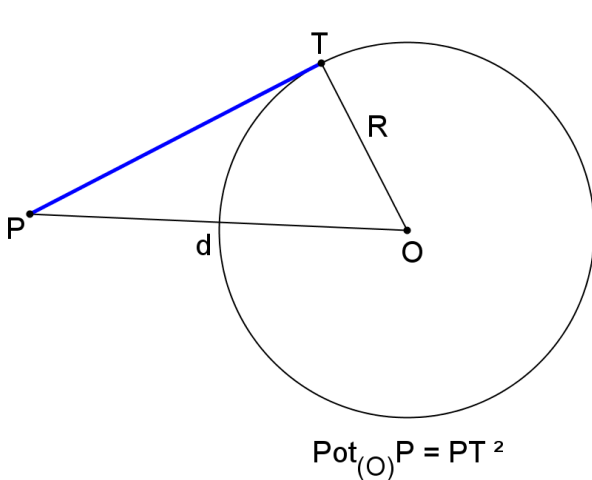
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = (R - d) \cdot (R + d) \Leftrightarrow PA \cdot PB = R^2 - d^2$$

Potência de ponto

A potência de um ponto P em relação a um círculo é dada por $d^2 - R^2$, onde d é a distância de P ao centro do círculo e R o raio do círculo.

$$\begin{cases} \text{P exterior ao círculo} \Rightarrow d > R \Rightarrow Pot_{(O)}P > 0 \\ \text{P pertence ao círculo} \Rightarrow d = R \Rightarrow Pot_{(O)}P = 0 \\ \text{P interior ao círculo} \Rightarrow d < R \Rightarrow Pot_{(O)}P < 0 \end{cases}$$

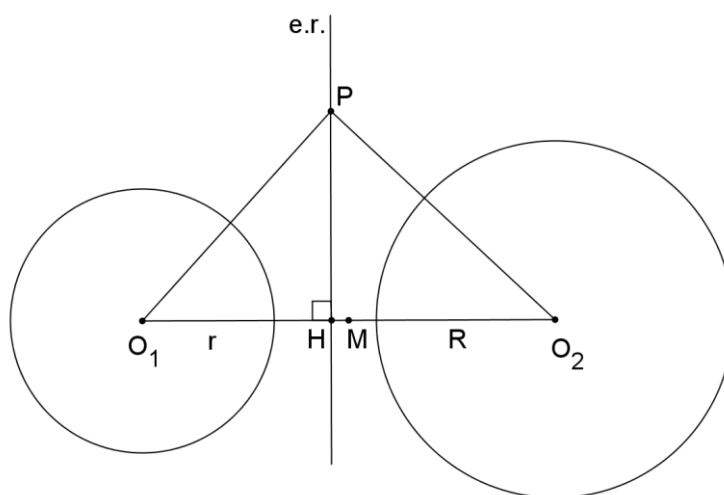
$Pot_{(O)}P = PT^2$

$Pot_{(O)}P = -PT^2$

Eixo radical

O lugar geométrico dos pontos cujas potências em relação a dois círculos não concêntricos são iguais é uma reta perpendicular a reta que une os centros dos dois círculos e é chamado eixo radical dos círculos.

Se (e.r.) é o eixo radical dos círculos de centro O_1 e O_2, então

$$P \in (\text{e.r.}) \Leftrightarrow \text{Pot}_{(O_1)} P = \text{Pot}_{(O_2)} P.$$

Demonstração:

Sejam os círculos de centros O_1 e O_2 e raios r e R, respectivamente.
Seja P um ponto que possui a mesma potência em relação aos dois círculos, então temos:

$PO_1^2 - r^2 = PO_2^2 - R^2 \Leftrightarrow PO_2^2 - PO_1^2 = R^2 - r^2$ (*)

Aplicando o teorema de Pitágoras nos ΔPHO_1 e ΔPHO_2, vem:

$PH^2 + HO_1^2 = PO_1^2 \wedge PH^2 + HO_2^2 = PO_2^2$

$\Rightarrow PO_2^2 - PO_1^2 = HO_2^2 - HO_1^2$ (**)

De (*) e (**), conclui-se que

$HO_2^2 - HO_1^2 = R^2 - r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (HO_2 + HO_1)(HO_2 - HO_1) = R^2 - r^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow HO_2 - HO_1 = \dfrac{R^2 - r^2}{O_1O_2}$

Mas $HO_2 + HO_1 = O_1O_2$, daí $HO_2 = \dfrac{O_1O_2}{2} + \dfrac{R^2 - r^2}{2 \cdot O_1O_2}$ e $HO_1 = \dfrac{O_1O_2}{2} - \dfrac{R^2 - r^2}{2 \cdot O_1O_2}$.

Assim, se definirmos o ponto M médio de O_1O_2, temos $MH = \dfrac{R^2 - r^2}{2 \cdot O_1O_2}$.

Assim, conclui-se que P encontra-se em uma reta perpendicular a O_1O_2 passando pelo ponto H, definido pela expressão acima.

Por outro lado, se um ponto P está na reta perpendicular a O_1O_2 passando pelo ponto H, então

$PH^2 + HO_1^2 = PO_1^2 \ \wedge \ PH^2 + HO_2^2 = PO_2^2$

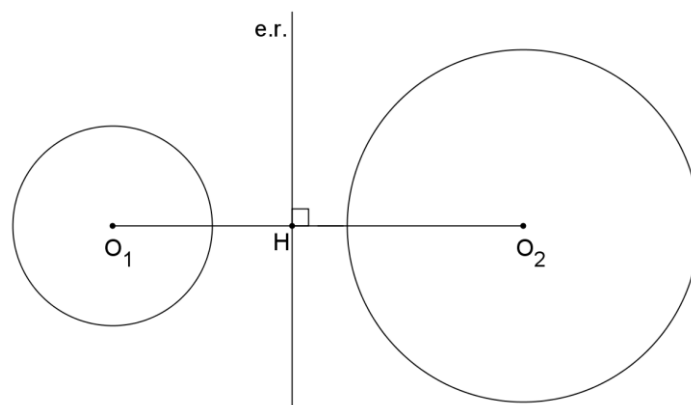
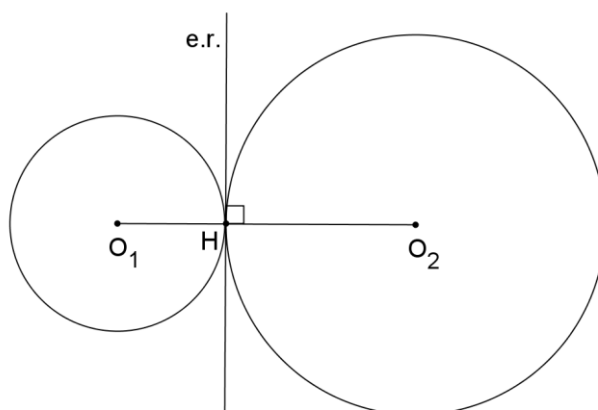
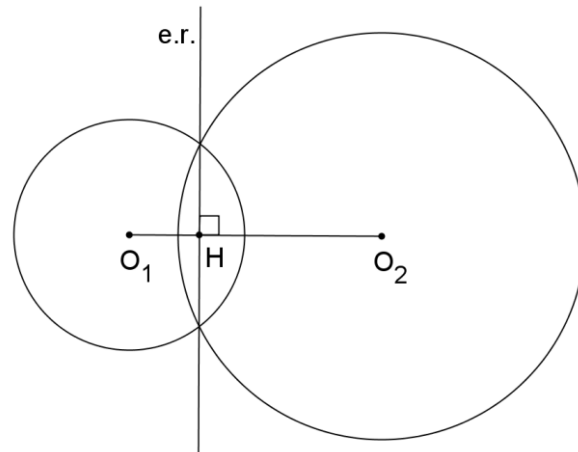
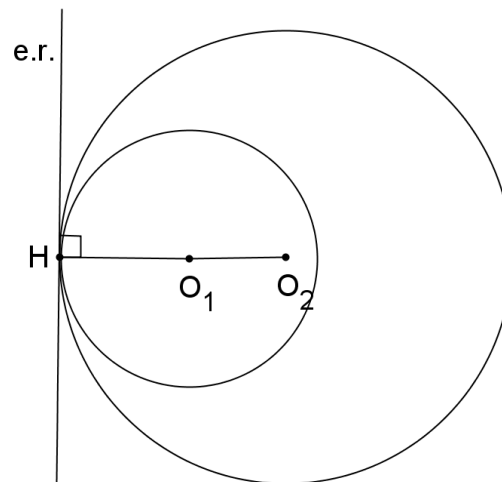
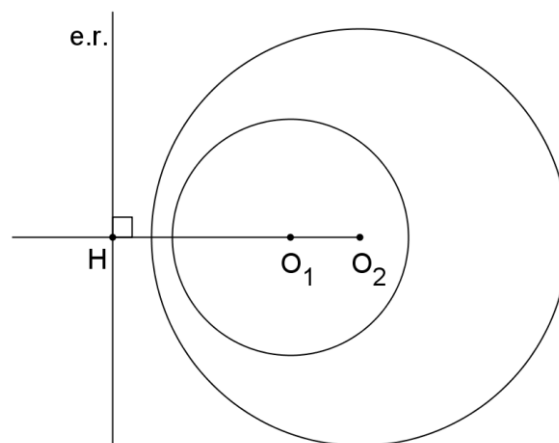
$\Rightarrow PO_2^2 - PO_1^2 = HO_2^2 - HO_1^2 =$

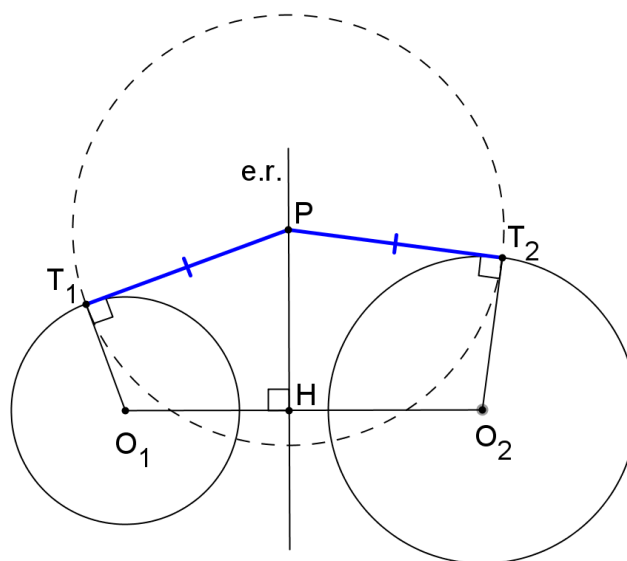
$= (HO_2 + HO_1)(HO_2 - HO_1) = O_1O_2 \cdot (2MH) = R^2 - r^2$

$\Leftrightarrow PO_2^2 - R^2 = PO_1^2 - r^2 \Leftrightarrow Pot_{(O_2)}P = Pot_{(O_1)}P$

Logo, todo ponto da reta perpendicular a O_1O_2 passando pelo ponto H possui a mesma potência em relação aos dois círculos.
Note que, como $HO_2 > HO_1$, então o ponto H está mais próximo do centro círculo de menor raio.

A seguir apresentamos a posição do eixo radical para as diversas posições relativas entre os círculos.

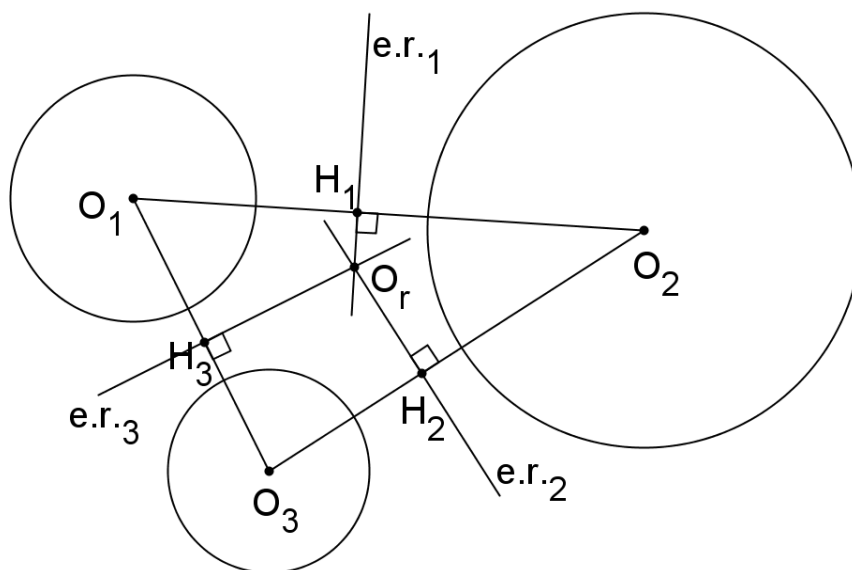
Circunferências exteriores

Circunferências tangentes exteriormente

Circunferências secantes

Circunferências tangentes interiormente

Circunferências interiores

Para determinar o eixo radical de duas circunferências exteriores ou interiores, basta traçar uma circunferência auxiliar secante às duas circunferências. Os dois eixos radicais vão interceptar-se em um ponto que é o centro radical dos três círculos. A reta que passa por esse ponto e é perpendicular à reta que une os centros das duas circunferências iniciais é seu eixo radical. Tente desenhar isso!

O eixo radical de dois círculos é o lugar geométrico dos pontos dos quais pode-se traçar tangentes de mesmo comprimento aos dois círculos.

O eixo radical de dois círculos é o lugar geométrico dos centros dos círculos ortogonais aos círculos dados.

Centro radical

O lugar geométrico dos pontos de mesma potência em relação a três círculos não concêntricos e cujos centros não são colineares é um único ponto, denominado centro radical dos círculos.

Se O_r é o centro radical dos círculos de centro O_1, O_2 e O_3, então

$$\text{Pot}_{(O_1)} O_r = \text{Pot}_{(O_2)} O_r = \text{Pot}_{(O_3)} O_r .$$

Demonstração:
Seja O_r a interseção dos eixos radicais $(e.r._1)$ dos círculos de centros O_1 e O_2, e $(e.r._2)$ dos círculos de centros O_2 e O_3. Seja ainda $(e.r._3)$ o eixo radical dos círculos de centros O_2 e O_3, então

$$\left.\begin{array}{l} O_r \in (e.r._1) \Rightarrow Pot_{(O_1)} O_r = Pot_{(O_2)} O_r \\ O_r \in (e.r._2) \Rightarrow Pot_{(O_2)} O_r = Pot_{(O_3)} O_r \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow Pot_{(O_1)} O_r = Pot_{(O_2)} O_r = Pot_{(O_3)} O_r \Rightarrow O_r \in (e.r._3)$$

Logo, O_r é o centro radical dos três círculos.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2003/2004

1) Analise as seguintes afirmativas sobre um sistema S se duas equações do primeiro grau com duas incógnitas x e y.
I. S sempre terá ao menos uma solução, se os seus termos independentes são iguais a zero.
II. Se a razão entre os coeficientes de x for igual à dos de y, S terá infinitas soluções.
III. Se a razão entre os coeficientes de x for diferente da dos de y, S terá apenas uma solução.
Assinale a alternativa correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
I. VERDADEIRA
A solução trivial $(x, y) = (0, 0)$ sempre é solução do sistema quando os termos independentes são iguais a zero.
II. FALSA
O sistema terá infinitas soluções (sistema possível e indeterminado) se a razão entre os coeficientes de x for igual à dos de y e igual à razão entre os termos independentes.
Se a razão entre os coeficientes de x for igual à dos de y e diferente da razão entre os termos independentes, o sistema será impossível, ou seja, não terá nenhuma solução.
III. VERDADEIRA
Quando a razão entre os coeficientes de x é diferente da dos de y, o sistema é possível e determinado e, portanto, possui apenas uma solução.

NOTA 3: DISCUSSÃO DE UM SISTEMA LINEAR DE DUAS EQUAÇÕES E DUAS VARIÁVEIS

Seja o sistema linear nas variáveis x e y: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$.

Se $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, então o sistema é possível e determinado, possui uma única solução e sua representação geométrica corresponde a duas retas concorrentes.
Se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, então o sistema é possível e indeterminado, possui infinitas soluções e sua representação geométrica corresponde a duas retas paralelas coincidentes.
Se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, então o sistema é impossível, possui soluções e a sua representação geométrica corresponde a duas retas paralelas distintas.

****

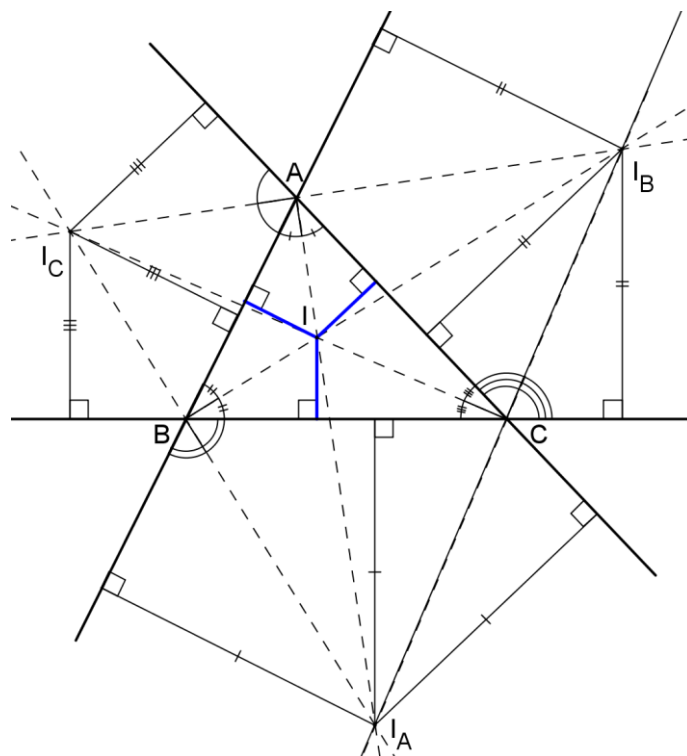
2) Quantas raízes reais tem a equação $\sqrt{x+20}=x$?
(A) Nenhuma.
(B) Uma.
(C) Duas, as quais são positivas.
(D) Duas, as quais são negativas.
(E) Duas, as quais têm sinais opostos.

RESPOSTA: B

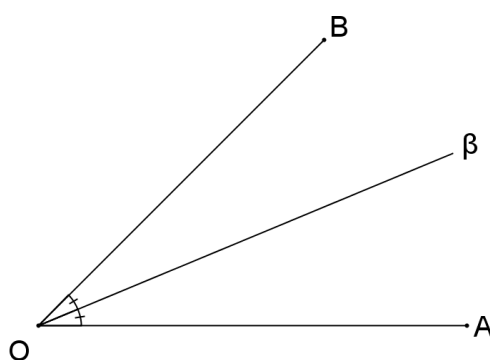
RESOLUÇÃO:
$\sqrt{x+20}=x \Leftrightarrow x+20=x^2 \;\wedge\; x+20\geq 0 \;\wedge\; x\geq 0 \Leftrightarrow x^2-x-20=0 \;\wedge\; x\geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x=-4 \;\vee\; x=5) \;\wedge\; x\geq 0 \Leftrightarrow x=5$
$\Leftrightarrow S=\{5\}$
Logo, a equação irracional possui apenas uma solução.

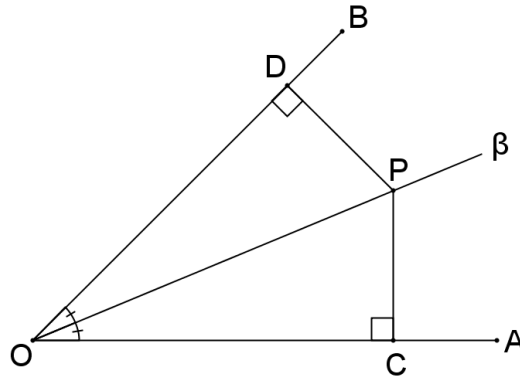
3) Quantos são os pontos de um plano α que são equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC contido em α?
(A) Um.
(B) Dois.
(C) Três.
(D) Quatro.
(E) Cinco.

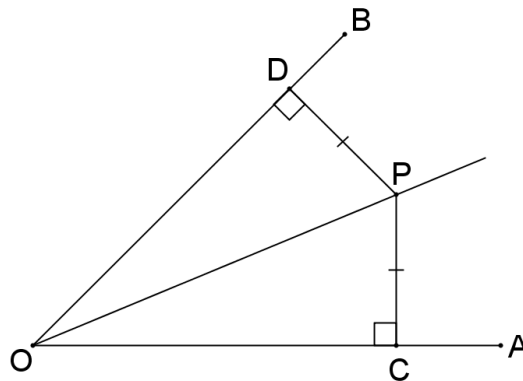
RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos lados de um ângulo é o par de bissetrizes do ângulo.

Assim, há apenas quatro pontos de α que são equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC, que são o incentro I (ponto de encontro das três bissetrizes internas) e os três exincentros I_A, I_B e I_C (pontos de encontro de duas bissetrizes externas e uma interna), conforme representado na figura acima.

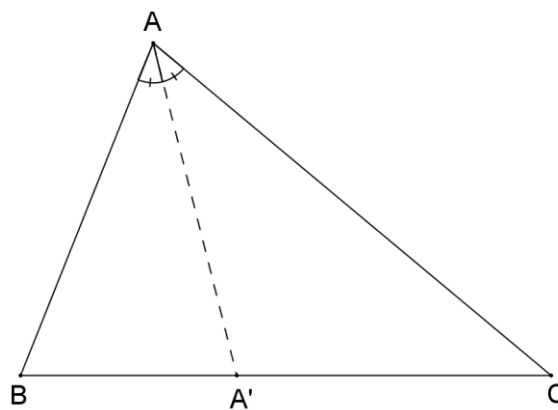
NOTA 4: BISSETRIZES

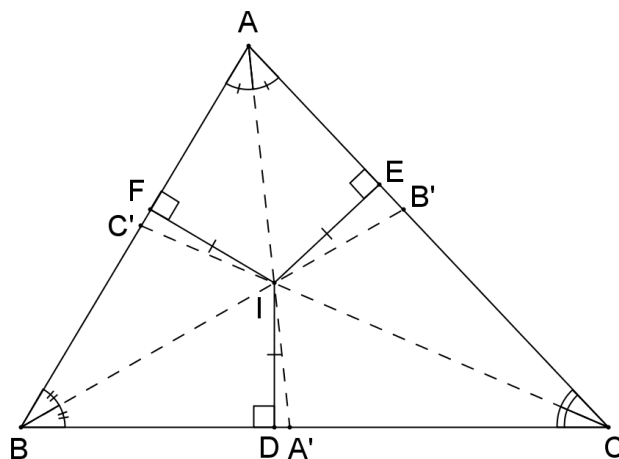
A bissetriz de um ângulo é uma semirreta que o divide em dois ângulos congruentes.

A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados de um ângulo.

Demonstração:
Seja um ponto $P \in \beta$ bissetriz de $A\hat{O}B$. Traçam-se as perpendiculares por P aos lados do ângulo.

Nos triângulos POC e POD, temos $\overline{PO}$ lado comum, $P\hat{O}C = P\hat{O}D$ e $P\hat{C}O = P\hat{D}O = 90^\circ$, então, pelo critério de congruência LAA_o, $\Delta POC \equiv \Delta POD$, o que implica $\overline{PC} = \overline{PD}$, ou seja, P equidista dos lados do ângulo.

Seja P um ponto que equidista dos lados do ângulo $A\hat{O}B$.

Nos triângulos POC e POD, temos $\overline{PO}$ lado comum e $\overline{PC} = \overline{PD}$, então, pelo critério de congruência especial para triângulos retângulos, $\Delta POC \equiv \Delta POD$, o que implica $P\hat{O}C = P\hat{O}D$, ou seja, P pertence à bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

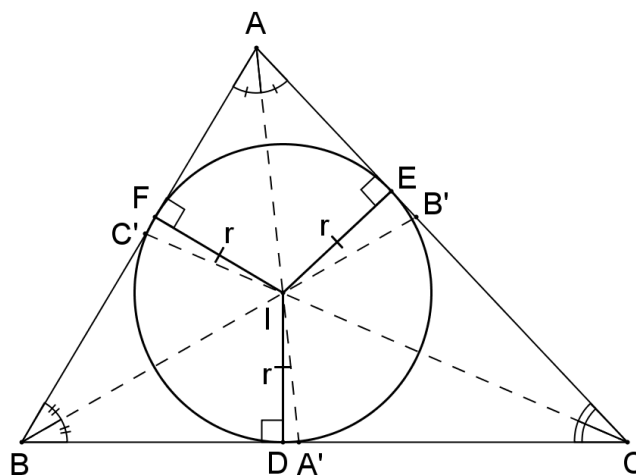
Bissetriz interna de um triângulo

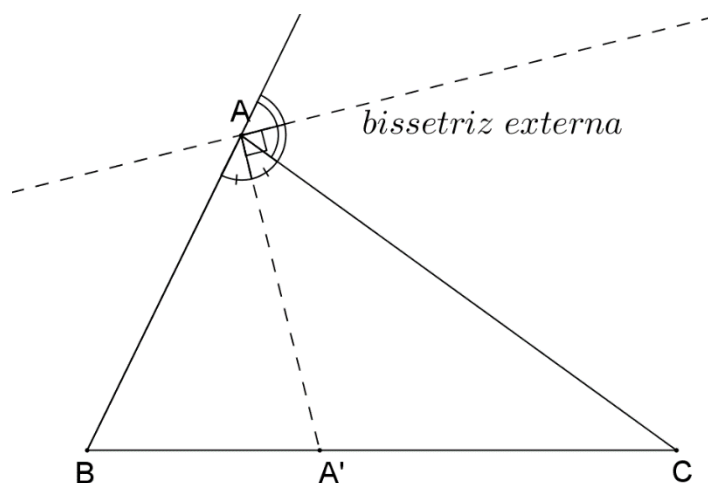
Uma bissetriz interna de um triângulo é um segmento com extremidade em um vértice e no lado oposto e que divide o ângulo desse vértice em dois ângulos adjacentes congruentes.

$$B\hat{A}A' \equiv A'\hat{A}C \Rightarrow \overline{AA'} \text{ é bissetriz relativa ao vértice } A \text{ do } \Delta ABC$$

As três bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se em um único ponto denominado **incentro** e que equidista dos lados do triângulo.

Demonstração:
Sejam $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ as bissetrizes relativas aos vértices A, B e C do triângulo ABC, respectivamente.
Se $\{I\} = \overline{AA'} \cap \overline{BB'}$, então, temos:

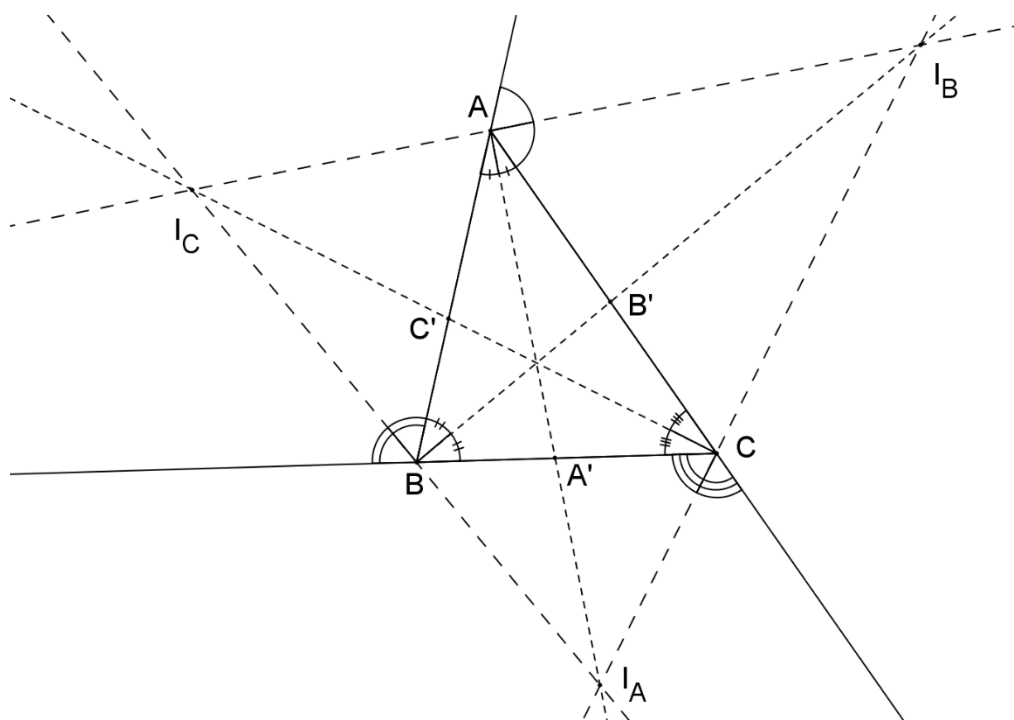
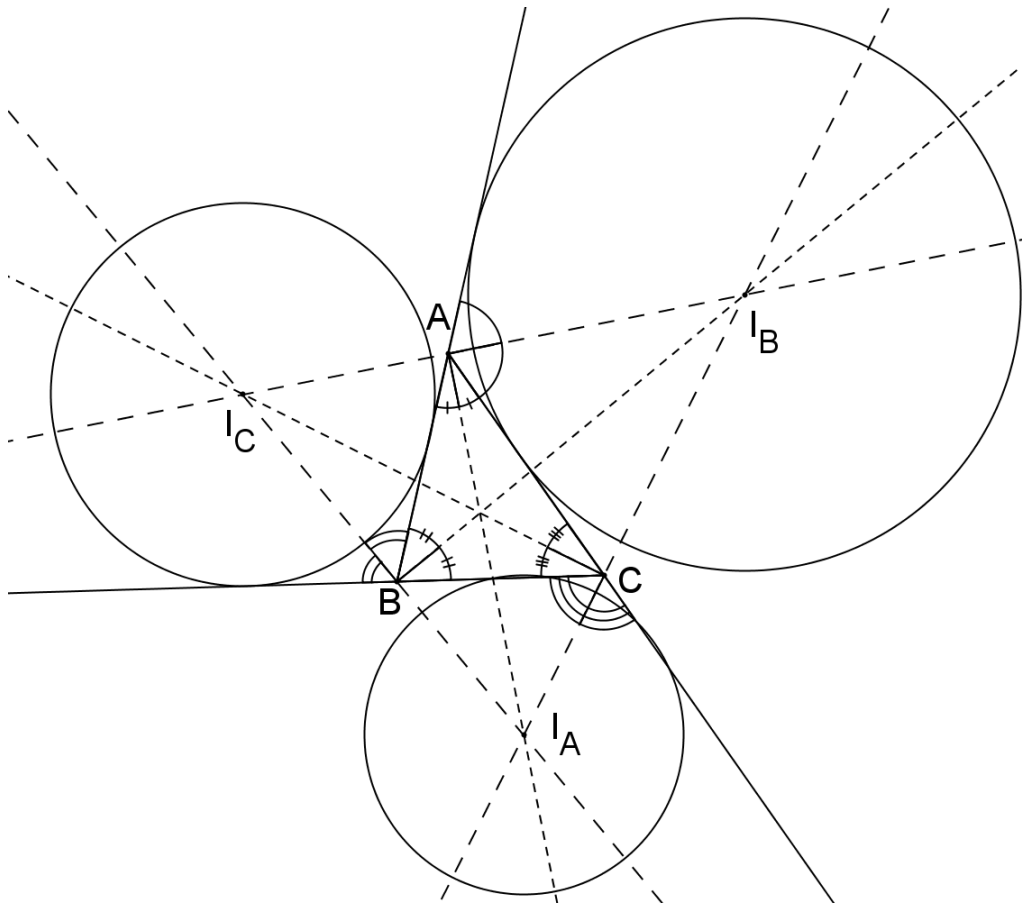
$$\left.\begin{array}{l} I \in \overline{AA'} \Rightarrow \overline{IE} \equiv \overline{IF} \\ I \in \overline{BB'} \Rightarrow \overline{ID} \equiv \overline{IF} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{ID} \equiv \overline{IE} \Rightarrow I \in \overline{CC'}.$$

Portanto, $\{I\} = \overline{AA'} \cap \overline{BB'} \cap \overline{CC'}$ e $\overline{ID} \equiv \overline{IE} \equiv \overline{IF}$, como queríamos demonstrar.

O incentro de um triângulo é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Bissetrizes externas de um triângulo

Uma bissetriz externa de um triângulo é uma reta que divide um ângulo externo do triângulo em dois ângulos adjacentes congruentes.

Assim como as três bissetrizes internas, as três bissetrizes externas também equidistam dos lados do triângulo.

Cada bissetriz externa é perpendicular à bissetriz interna do mesmo vértice.

As três bissetrizes externas intersectam-se duas a duas determinando três pontos denominados exincentros.

Os exincentros são equidistantes dos três lados do triângulo e são centros dos três círculos ex-inscritos.

A bissetriz interna oposta a um lado passa pelo exincentro determinado pelas bissetrizes externas dos ângulos adjacentes a esse lado.

Note que as demonstrações das propriedades das bissetrizes externas e dos exincentros são análogas às das bissetrizes internas e do incentro, pois correspondem aos mesmos lugares geométricos.

****

4) Se o número natural expresso por $a^2 - b^2$ é primo, $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, então a é

(A) o antecedente de b.
(B) o consequente de b.
(C) múltiplo de b.
(D) divisor de b.
(E) um número par.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Como $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ é primo e $a+b > a-b$, então $a-b=1 \Leftrightarrow a=b+1$, ou seja, a é o consequente de b.

5) Se $\text{m.m.c.}(x,y) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ e $\text{m.d.c.}(x,y) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, x e y números naturais, quantos são os valores possíveis para x?
(A) 16
(B) 8
(C) 6
(D) 4
(E) 2

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Como $\text{m.m.c.}(x,y) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ e $\text{m.d.c.}(x,y) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, então x é da forma $x = 2^3 \cdot 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c$, onde $a \in \{2,3\}$, $b \in \{1,2\}$ e $c \in \{0,1\}$. Como temos 2 possibilidades para os valores de a, 2 para b e 2 para c, então, pelo princípio multiplicativo, o total de valores possíveis de x é $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

6) Um certo líquido aumenta o seu volume em 15%, ao ser congelado. Quantos mililitros desse líquido deve-se colocar, no máximo, em um recipiente de 230 mililitros, sabendo-se que este não sofre qualquer alteração da sua capacidade nesse processo?
(A) $195,5$.
(B) 200.
(C) 205.
(D) 210.
(E) 215.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Seja V o volume máximo, então, após o congelamento de V, o novo volume deve ser $230 \text{ m}\ell$. Assim,

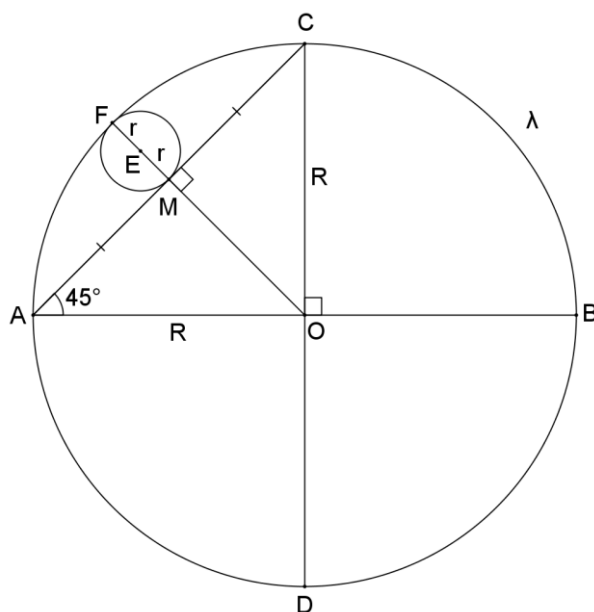
$$V \cdot (1+15\%) = 230 \Leftrightarrow 1{,}15 \cdot V = 230 \Leftrightarrow V = \frac{230}{1{,}15} = 200 \text{ m}\ell.$$

7) Considere uma circunferência λ de raio R e diâmetros perpendiculares AB e CD. O raio da menor circunferência tangente interiormente à λ e à corda AC, no seu ponto médio, é dado por
(A) $\frac{R}{4}$
(B) $\frac{R\sqrt{2}}{4}$
(C) $\frac{R\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$

(D) $\frac{R(\sqrt{2}+1)}{4}$

(E) $\frac{R}{6}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Seja M o ponto médio de AC, então $OM \perp AC$. Seja r o raio da circunferência tangente interiormente à λ e à corda AC. A circunferência tangencia λ no ponto F, que está sobre o prolongamento de OM.

$A\hat{O}C = 90^\circ \Rightarrow O\hat{A}C = O\hat{C}A = 45^\circ$

No triângulo retângulo AOM, temos: $\text{sen}\, 45^\circ = \frac{OM}{AO} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{OM}{R} \Leftrightarrow OM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

$OF = OM + 2r = R \Leftrightarrow \frac{R\sqrt{2}}{2} + 2r = R \Leftrightarrow 2r = R\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow r = \frac{R(2-\sqrt{2})}{4}$ u.c.

8) O resultado da divisão de 7^{12} por 6 é um número
(A) inteiro.
(B) com parte decimal finita.
(C) com parte decimal infinita periódica simples.
(D) com parte decimal infinita periódica composta.
(E) com parte decimal infinita e não periódica.

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Como $\text{mdc}(7,6)=1$ e o denominador é $6=2\cdot 3$, teremos uma dízima periódica, pois o denominador possui um fator diferente de 2 ou 5, mas essa dízima periódica será composta em razão do fator 2. Logo, o resultado da divisão é um número com parte decimal infinita periódica composta.

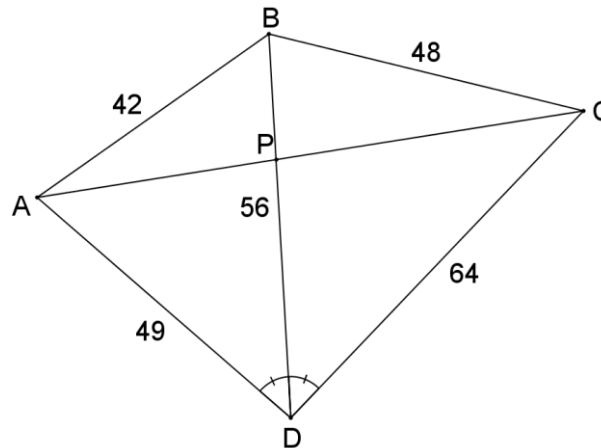
9) O resto da divisão de $5^{131}+7^{131}+9^{131}+15^{131}$ por 12 é igual a
(A) 0.
(B) 2.
(C) 7.
(D) 9.
(E) 11.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$$5^{131}+7^{131}+9^{131}+15^{131}\equiv 5^{131}+(-5)^{131}+(-3)^{131}+3^{131}\equiv 5^{131}-5^{131}-3^{131}+3^{131}\equiv 0\pmod{12}$$
Logo, o resto da divisão de $5^{131}+7^{131}+9^{131}+15^{131}$ por 12 é zero.

10) Num quadrilátero $ABCD$ tem-se: $AB=42$, $BC=48$, $CD=64$, $DA=49$ e P é o ponto de interseção entre as diagonais AC e BD. Qual é a razão entre os segmentos PA e PC, sabendo-se que a diagonal BD é igual a 56?
(A) $\frac{7}{8}$
(B) $\frac{8}{7}$
(C) $\frac{7}{6}$
(D) $\frac{6}{7}$
(E) $\frac{49}{64}$

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

$\frac{AB}{BC}=\frac{42}{48}=\frac{7}{8}; \frac{AD}{BD}=\frac{49}{56}=\frac{7}{8}; \frac{BD}{CD}=\frac{56}{64}=\frac{7}{8}$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BCD \Rightarrow A\hat{D}B = B\hat{D}C$

Logo, DP é bissetriz do ângulo $\hat{D}$ do ΔACD.

Aplicando o teorema das bissetrizes no ΔACD, temos: $\frac{PA}{PC}=\frac{AD}{CD}=\frac{49}{64}$.

11) Um fabricante observou que tem condições de aumentar, mensalmente, a sua produção em $1/5$ da produção do mês anterior. Considerando a condição dada, se, em janeiro de 2004, a sua produção for P, em que mês desse mesmo ano a sua produção será, pela primeira vez, maior ou igual a $2P$?

(A) abril.
(B) maio.
(C) junho.
(D) julho.
(E) agosto.

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

A produção no mês n é dada por $P\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}\cdot P$. Assim, devemos ter $\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}\cdot P \geq 2P \Leftrightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1} \geq 2$.

Como $\left(\frac{6}{5}\right)^{4-1}=\frac{216}{125}<2<\frac{1296}{625}=\left(\frac{6}{5}\right)^{5-1}$, então $n \geq 5$.

Logo, a sua produção será, pela primeira vez, maior ou igual a $2P$ quando $n=5$, ou seja, em maio.

12) Dada a equação do $2°$ grau na incógnita x: $4x^2+kx+3=0$. Quantos são os valores inteiros possíveis do parâmetro k, tais que essa equação só admita raízes racionais.
(A) 2
(B) 3
(C) 4
(D) 6
(E) 8

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

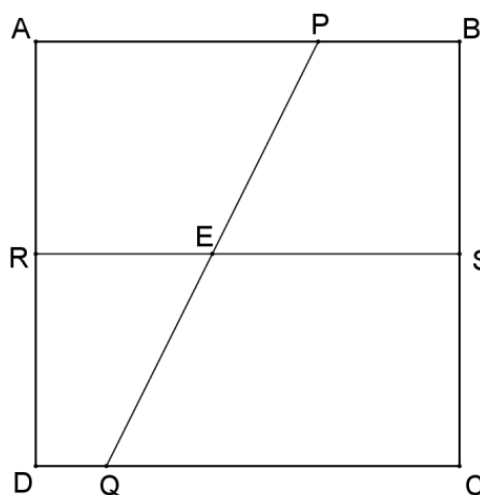
$$4x^2+kx+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot4}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-48}}{8}$$

$$x\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{k^2-48}=p,\ p\in\mathbb{Z}_+^*\Rightarrow k^2-48=p^2\Leftrightarrow k^2-p^2=48\Leftrightarrow(k+p)(k-p)=48$$

Observando que $(k+p)$ e $(k-p)$ têm a mesma paridade e que $k+p>k-p$, podemos montar a tabela a seguir:

$k+p$	$k-p$	k
24	2	13
–24	–2	–13
12	4	8
–12	–4	–8
8	6	7
–8	–6	–7

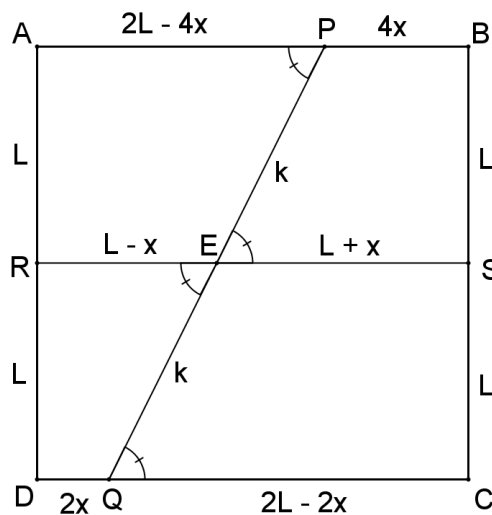
Logo, há 6 valores inteiros possíveis para o parâmetro k.

13)

Num quadrado $ABCD$ tem-se os pontos: P, pertencente ao lado AB; Q, pertencente ao lado CD; R, médio de DA; e S, médio de BC. Se PB é o dobro de DQ e E é o ponto de interseção entre

PQ e RS, quantos trapézios retângulos semelhantes sempre existirão na figura, sabendo-se que $PB + DQ < AB$?

(A) Dois.
(B) Três.
(C) Quatro.
(D) Cinco.
(E) Seis.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Todos os trapézios retângulos da figura possuem os mesmos ângulos, mas para que eles sejam semelhantes deve possuir lados proporcionais.
Vamos listar os lados dos trapézios da figura na seguinte ordem: base menor, lado não paralelo perpendicular, lado não paralelo oblíquo e base maior, e compará-los.

$\#DQPA: 2x;\ 2L;\ 2k;\ (2L - 4x)$

$\#BPQC: 4x;\ 2L;\ 2k;\ (2L - 2x)$

$\#DQER: 2x;\ L;\ k;\ (L - x)$

$\#REPA: (L - x);\ L;\ k;\ (2L - 4x)$

$\#BPES: 4x;\ L;\ k;\ (L + x)$

$\#SEQC: (L + x);\ L;\ k;\ (2L - 2x)$

O único caso em que sempre há proporcionalidade, independente do valor de x, é entre os lados de $\#BPQC$ e $\#DQER$, portanto $\#BPQC \sim \#DQER$.
Logo, sempre existirão dois trapézios retângulos semelhantes na figura.

14) Analise as afirmativas abaixo, onde a e b são números reais.

I – $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=\sqrt{(a+b)^2}$

II – $\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}=\sqrt{(a\cdot b)^2}$

III – $\dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\sqrt{(a\div b)^2}$, $b\neq 0$

Assinale a alternativa correta.
(A) As afirmativas I, II e III são sempre verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é sempre verdadeira.
(C) Apenas as afirmativas I e II são sempre verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas I e III são sempre verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas II e III são sempre verdadeiras.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
I. FALSA

$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=|a|+|b|$ e $\sqrt{(a+b)^2}=|a+b|$

Note o que ocorre no seguinte contraexemplo:

$a=1 \wedge b=-1 \Rightarrow \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=\sqrt{1^2}+\sqrt{(-1)^2}=1+1=2\neq 0=\sqrt{(1+(-1))^2}=\sqrt{(a+b)^2}$.

II. VERDADEIRA

$\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2}=\sqrt{a^2\cdot b^2}=\sqrt{(a\cdot b)^2}$

III. VERDADEIRA

$$b\neq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\sqrt{(a\div b)^2}$$

15) Dada a equação: $(x^2+1)^2+(x^2+3x-17)^2=0$, pode-se afirmar que, no universo dos números reais, o seu conjunto solução
(A) é vazio.
(B) tem apenas um elemento.
(C) tem apenas dois elementos.
(D) tem apenas três elementos.
(E) tem apenas quatro elementos.

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Sabemos que $\left(x^2+1\right)^2 \geq 0$ e $\left(x^2+3x-17\right)^2 \geq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então
$\left(x^2+1\right)^2+\left(x^2+3x-17\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2+1=0 \ \wedge \ x^2+3x-17=0$.

O conjunto solução da equação original $\left(x^2+1\right)^2+\left(x^2+3x-17\right)^2=0$ é a interseção do conjunto solução das equações $x^2+1=0$ e $x^2+3x-17=0$, mas $x^2+1=0$ não possui solução real, ou seja, seu conjunto solução é vazio, então o conjunto solução da equação original é vazio.

Essa questão também pode ser resolvida da seguinte forma:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1>0 \Rightarrow \left(x^2+1\right)^2>0$$
$$x^2+3x-17 \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(x^2+3x-17\right)^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow \left(x^2+1\right)^2+\left(x^2+3x-17\right)^2>0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow S=\varnothing$$

16) No estudo de ciências, item “Gases Perfeitos”, tem-se a seguinte fórmula: $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}$, onde P_1, V_1 e T_1 são, respectivamente, as condições de pressão, volume e temperatura de um gás perfeito num primeiro estado; e P_2, V_2 e T_2 num segundo estado. Considerando a fórmula dada, analise as afirmativas abaixo.
I – Pressão e volume são diretamente proporcionais.
II – Pressão e temperatura são diretamente proporcionais.
III – Volume e temperatura são inversamente proporcionais.
Assinale a alternativa correta.
(A) As afirmativas I, II e III são falsas.
(B) Apenas a afirmativa I é falsa.
(C) Apenas a afirmativa II é falsa.
(D) Apenas a afirmativa III é falsa.
(E) Apenas as afirmativas I e III são falsas.

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Considerando $\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}=k$, onde k é uma constante, podemos dizer que $\frac{PV}{T}=k \Leftrightarrow P=k\cdot\frac{T}{V}$, o que implica que a pressão P é diretamente proporcional à temperatura T e inversamente proporcional ao volume V. Por outro lado, podemos escrever $V=k\cdot\frac{T}{P}$, o que implica que o volume V e a temperatura T são diretamente proporcionais.
Com base nas conclusões acima, a análise das afirmativas resulta o seguinte:
I. FALSA
II. VERDADEIRA
III. FALSA

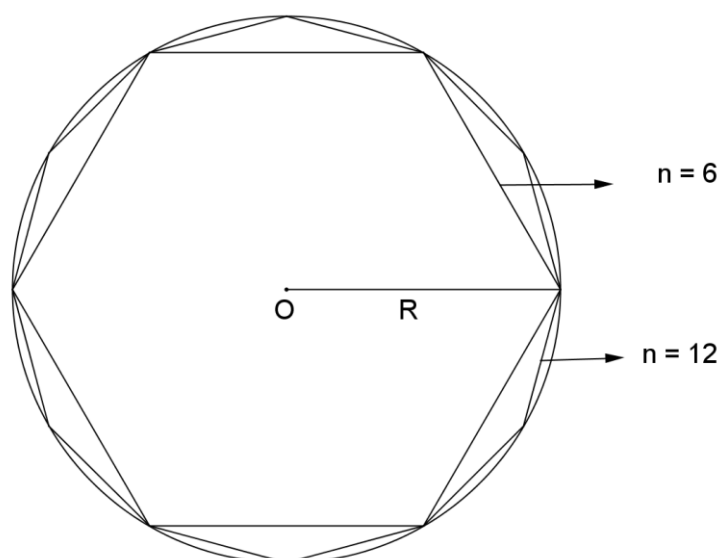
17) O conjunto dos trinta talheres de uma certa casa é constituído de garfos, facas e colheres, de aço inoxidável e aço comum. Sabe-se que
− existem cinco facas, seis garfos e sete colheres, todos de aço comum.
− o número total de garfos é o dobro do número de facas de aço inoxidável.
− o número de facas de aço inoxidável excede o número de colheres desse mesmo tipo de aço de duas unidades.
Quantas colheres tem esse conjunto de talheres?
(A) 10
(B) 11
(C) 12
(D) 13
(E) 14

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
Sejam x a quantidade de facas de aço inoxidável, y a quantidade de garfos de aço inoxidável e z a quantidade de colheres de aço inoxidável.
O número total de garfos é $y+6$ é o dobro do número de facas de aço inoxidável, ou seja, $y+6=2x \Leftrightarrow y=2x-6$ (i).
O número de facas de aço inoxidável x excede o número de colheres desse mesmo tipo de aço z de duas unidades, ou seja, $x-z=2 \Leftrightarrow x=z+2$ (ii).
O total de talheres é 30, então $(x+y+z)+(5+6+7)=30 \Leftrightarrow x+y+z=12$ (iii).
$(i) \wedge (ii) \Rightarrow y=2x-6=2\cdot(z+2)-6=2z-2$ (iv)
$(ii),(iii) \wedge (iv) \Rightarrow x+y+z=12 \Rightarrow (z+2)+(2z-2)+z=12 \Leftrightarrow z=3$.
A quantidade de colheres do conjunto de talheres é $z+7=3+7=10$.

18) Um estudante foi calculando o lado de um polígono regular de $2n$ lados, inscrito em uma circunferência de raio 10 centímetros, para n sucessivamente igual a 6, 12, 24, 48, 96, etc. Após determinar cada lado, calculou o perímetro p do respectivo polígono, e observou que p é um número cada vez mais próximo de, porém menor que
(A) 60
(B) 61
(C) 62
(D) 63
(E) 64

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

O perímetro do polígono de $2n$ lados, inscrito em um círculo de raio R, aproxima-se do perímetro da circunferência $2\pi R$, quando n cresce, sem porém ultrapassar esse valor.
No caso em análise $R = 10$, p tende a 20π e $p < 20\pi$. O número π é um número irracional dado por $3{,}141592\ldots$, então $20\pi \approx 62{,}83$. Logo, p aproxima-se sem ultrapassar o número 63.

19) Sejam os polinômios $p = x^2 + 4x$ e $q = x^2 + (3k-1)x$. Se a razão entre p e q é diferente de 1, necessariamente

(A) $k \neq \frac{5}{3}$

(B) $k \neq \frac{3}{5}$

(C) $k \neq \frac{4}{3}$

(D) $k \neq \frac{3}{4}$

(E) $k \neq 1$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Se a razão $\frac{p}{q}$ existe, então $q = x^2 + (3k-1)x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \ \wedge \ x \neq 1-3k$.

Seja $x \in \mathbb{R} - \{0, 1-3k\}$, então $\frac{p}{q} \neq 1 \Leftrightarrow p \neq q \Leftrightarrow x^2 + 4x \neq x^2 + (3k-1)x \Leftrightarrow 3k-1 \neq 4 \Leftrightarrow k \neq \frac{5}{3}$.

$\frac{p}{q} = 1 \Leftrightarrow p \equiv q \ \wedge \ q \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x \equiv x^2 + (3k-1)x \Leftrightarrow 3k-1 = 4 \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}$

20) Num triângulo acutângulo isósceles ABC, o segmento BP, P interno ao segmento AC, forma com o lado BA um ângulo de 15°. Quanto mede o maior ângulo de PBC, sabendo que os triângulos ABP e ABC são semelhantes?

(A) $65,5^\circ$

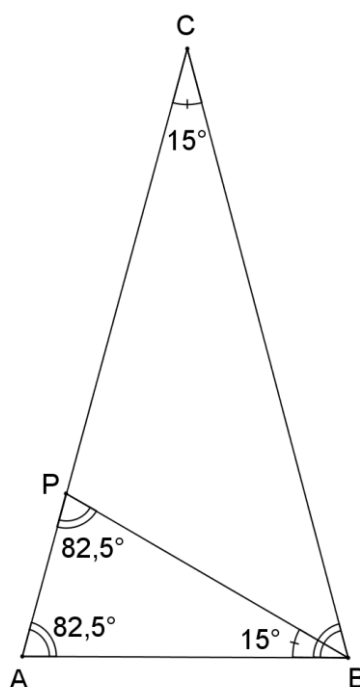
(B) $82,5^\circ$

(C) $97,5^\circ$

(D) 135°

(E) 150°

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
A figura a seguir indica a situação descritas no enunciado e as conclusões obtidas e foi feita fora de proporção para facilitar a visualização.

Se o ΔABC é isósceles e $\Delta ABP \sim \Delta ABC$, então os dois triângulos possuem ângulos iguais e ambos são isósceles.

No ΔABP, $A\hat{B}P = 15^\circ$ deve ser o ângulo do vértice, pois o triângulo é acutângulo. Assim, $B\hat{P}A = B\hat{A}P = B\hat{A}C = \dfrac{180^\circ - 15^\circ}{2} = 82,5^\circ$.

No ΔABC, temos $A\hat{B}C > 15^\circ$, então $B\hat{A}C = A\hat{B}C = 82,5^\circ$ e $A\hat{C}B = 15^\circ$.

Os ângulos do ΔPBC são $B\hat{C}P = 15^\circ$, $C\hat{P}B = A\hat{B}C - A\hat{B}P = 82,5^\circ - 15^\circ = 67,5^\circ$ e $B\hat{P}C = 180^\circ - 82,5^\circ = 97,5^\circ$. Portanto, o maior ângulo do ΔPBC mede $97,5^\circ$.

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2002/2003

1) O número de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual a
(A) 268
(B) 269
(C) 270
(D) 271
(E) 272

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
No intervalo indicado o menor múltiplo de 12 é $360 = 12 \cdot 30$ e o maior múltiplo de 12 é $3576 = 12 \cdot 298$. Logo, entre 357 e 3578 há $(298 - 30) + 1 = 269$ múltiplos de 12.

Isso pode ser calculado, com auxílio da função parte inteira, fazendo $\left\lfloor \frac{3578-1}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{357}{12} \right\rfloor = 298 - 29 = 269$.
Na primeira expressão, subtraiu-se uma unidade, pois a extremidade 3578 não está incluída no intervalo, já na segunda não se subtraiu uma unidade exatamente com o intuito de excluir a extremidade que não está incluída.

2) Se o conjunto solução da inequação $3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 \le 0$ é S, então o número de elementos da interseção do conjunto S com o conjunto dos números inteiros é igual a:
(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$
$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + 10 \le 0 \Rightarrow 3\left(y^2 - 2\right) - 8y + 10 \le 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \le 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \le y \le 2$$
$x + \frac{1}{x} \ge \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3 \ge 0$ que é verdade $\forall x \in \mathbb{R}$, pois $\Delta < 0$.

$x+\frac{1}{x}\le 2 \Leftrightarrow x^2-2x+1\le 0 \Leftrightarrow x=1$

Fazendo a interseção das soluções das duas desigualdades, temos $S=\{1\}$.
Logo, o número de elementos da interseção de S com $\mathbb{Z}$ é 1.

3) Se $a=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ e $b=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$, então $a+b$ é igual a:
(A) $\sqrt{10}$
(B) 4
(C) $2\sqrt{2}$
(D) $\sqrt{5}+1$
(E) $\sqrt{3}+2$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$$a+b=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}>0$$

$$\Rightarrow (a+b)^2=\left(\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2+2\cdot\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\left(\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2=$$

$$=4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{4^2-\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2}+4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}=8+2\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}=$$

$$=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}=8+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=8+2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)=6+2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}+1\right)^2$$

$$\Rightarrow a+b=\sqrt{5}+1$$

Observe que usamos que $x^2=y^2\Rightarrow x=y$, pois $x,y>0$. Em geral, $x^2=y^2\Rightarrow x=\pm y$.

4) Se x e y são números inteiros e positivos, representa-se o máximo divisor comum de x e y por $\text{mdc}(x,y)$; assim, o número de pares ordenados (x,y) que são soluções do sistema $\begin{cases} x+y=810 \\ \text{mdc}(x,y)=45 \end{cases}$ é igual a:
(A) 6
(B) 8
(C) 10
(D) 16
(E) 18

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$\text{mdc}(x,y)=45\Rightarrow \exists a,b\in\mathbb{Z}_+^*$ tais que $x=45\cdot a$, $y=45\cdot b$ e $\text{mdc}(a,b)=1$

$x+y=810 \Rightarrow 45\cdot a+45\cdot b=810 \Leftrightarrow a+b=18$

$(a,b)\in\{(1,17);(5,13);(7,11);(11,7);(13,5);(17,1)\}$

Cada par ordenado (a,b) corresponde a um par ordenado (x,y). Logo, há 6 pares ordenados (x,y) que são soluções do sistema.

5) Um relógio indica dois minutos menos do que a hora certa e adianta t minutos por dia. Se estivesse atrasado três minutos e adiantasse $\left(t+\frac{1}{2}\right)$ minutos por dia, então marcaria a hora certa exatamente um dia antes do que vai marcar. O tempo t, em minutos, que esse relógio adianta por dia está compreendido entre:

(A) $\frac{1}{9}$ e $\frac{2}{9}$

(B) $\frac{2}{9}$ e $\frac{3}{9}$

(C) $\frac{4}{9}$ e $\frac{5}{9}$

(D) $\frac{6}{9}$ e $\frac{7}{9}$

(E) $\frac{8}{9}$ e $\frac{9}{9}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Seja d o número de dias que o relógio demora para marcar a hora certa na primeira situação, então $t\cdot d=2\text{ min}$.

Na segunda situação, temos:

$$\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot(d-1)=3\text{ min} \Leftrightarrow td-t+\frac{d}{2}-\frac{1}{2}=3 \Rightarrow 2-t+\frac{d}{2}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow t=\frac{d}{2}-\frac{3}{2}$$

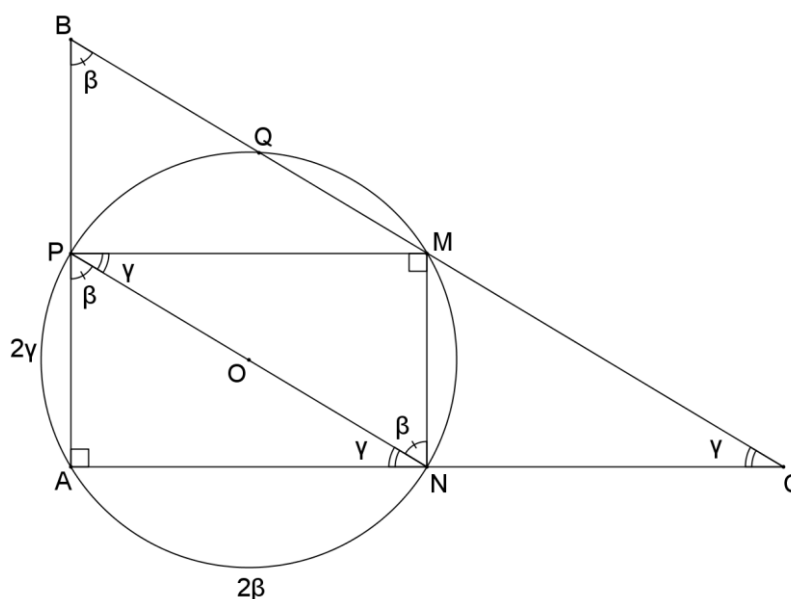
Substituindo $t=\frac{d}{2}-\frac{3}{2}$ em $t\cdot d=2\text{ min}$, temos:

$$\left(\frac{d}{2}-\frac{3}{2}\right)\cdot d=2 \Leftrightarrow d^2-3d-4=0 \Leftrightarrow d=-1 \text{ (não convém) ou } d=4$$

$$\Rightarrow t=\frac{2}{d}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\text{ min} \Rightarrow \frac{4}{9}<t<\frac{5}{9}$$

6) Considere um triângulo retângulo e uma circunferência que passa pelos pontos médios dos seus três lados. Se x, y e z $(x < y < z)$ são as medidas dos arcos dessa circunferência, em graus, exteriores ao triângulo, então
(A) $z = 360^\circ - y$
(B) $z = x + y$
(C) $x + y + z = 180^\circ$
(D) $x + y = 108^\circ$
(E) $z = 2x + y$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Seja o triângulo retângulo ABC, onde $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \gamma$, tais que $\gamma < \beta < 90^\circ$. Sejam M, N e P os pontos médios dos lados do triângulo, então $MN \parallel AB$, $MP \parallel AC$ e $NP \parallel BC$, e o ΔMNP também é um triângulo retângulo e o quadrilátero $MNAP$ é um retângulo.
Assim, a circunferência que passa por M, N e P tem diâmetro NP e também passa por A.

$M\hat{P}N = A\hat{N}P = A\hat{C}B = \gamma \Rightarrow AP = MN = 2\gamma$

$M\hat{N}P = A\hat{P}N = A\hat{B}C = \beta \Rightarrow AN = MP = 2\beta$

$NP \parallel BC \Rightarrow PQ = MN = 2\gamma$

$\Rightarrow MQ = MP - PQ = AN - AP \Leftrightarrow AN = AP + MQ$

$\Rightarrow AN > AP$ e $AN > QM$

Assim, $AN = z$, e AP e MQ são x e y, em alguma ordem. Logo, $z = x + y$.

7) Se os lados de um triângulo medem, respectivamente, $3x$, $4x$ e $5x$, em que x é um número inteiro positivo, então a distância entre os centros dos círculos inscritos e circunscritos a esse triângulo corresponde a

(A) $\frac{5x}{4}$

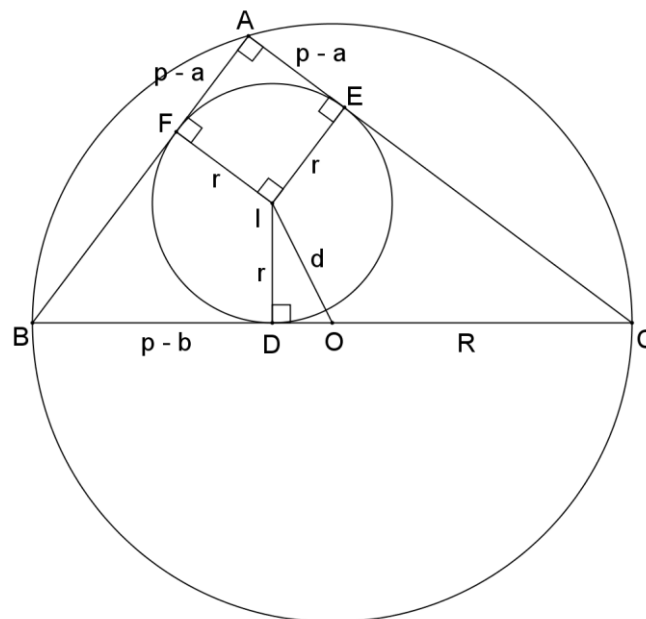
(B) $\frac{(1+\sqrt{2})x}{2}$

(C) $x\sqrt{2}$

(D) $\frac{x\sqrt{5}}{2}$

(E) $\frac{5x}{6}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Seja o triângulo ABC de lados $BC = a = 5x$, $AC = b = 4x$ e $AB = c = 3x$. Sejam O o centro do círculo circunscrito e I o centro do círculo inscrito ao ΔABC e, $IO = d$ a distância pedida.
Como $(5x)^2 = (3x)^2 + (4x)^2$, então o ΔABC é retângulo.

O centro do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa, então $R = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.
Os segmentos determinados pelo círculo inscrito ao ΔABC adjacentes ao vértice A são $AE = AF = p - a = 6x - 5x = x$ e os segmentos adjacentes ao vértice B são $BD = BF = p - b = 6x - 4x = 2x$, onde $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5x+4x+3x}{2} = 6x$ é o semiperímetro do triângulo.

Como os raios do círculo inscrito são perpendiculares aos lados do triângulo nos pontos de tangência, então o quadrilátero $AEIF$ é um quadrado. Portanto, $r = p - a = x$.

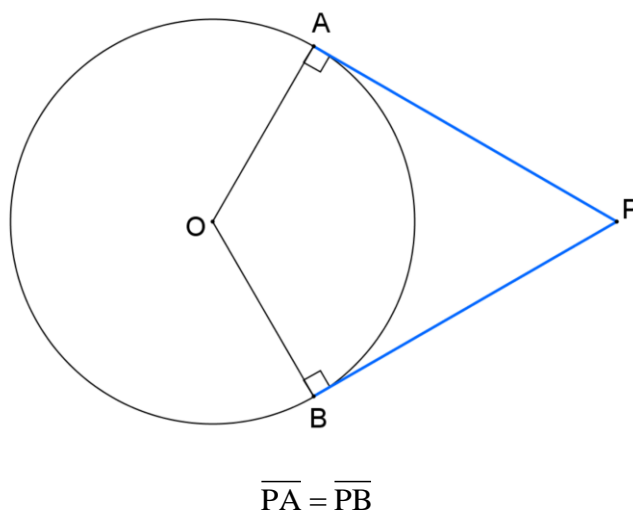
$$DO = OB - BD = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{5x}{2} - 2x = \frac{x}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo IDO, temos:

$$IO^2 = ID^2 + DO^2 \Leftrightarrow d^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5x^2}{4} \Leftrightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{2} x \text{ u.c.}.$$

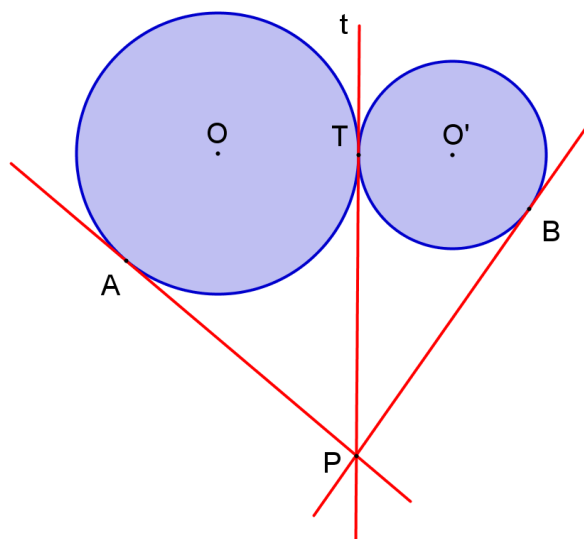
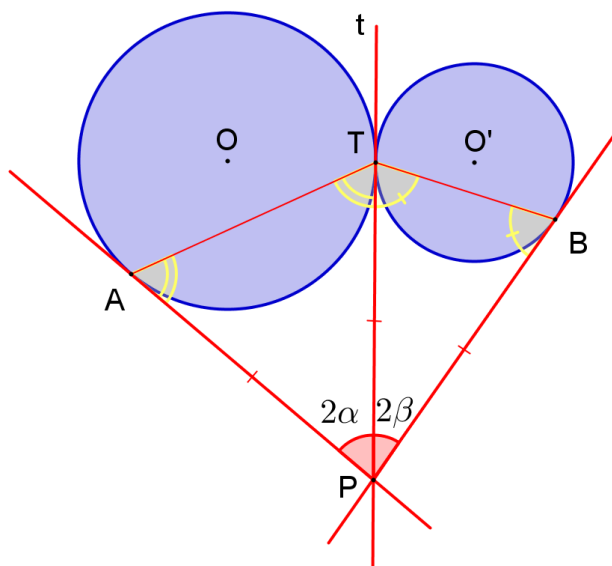
NOTA 5: SEGMENTOS TANGENTES NA CIRCUNFERÊNCIA

Segmentos tangentes

Os segmentos tangentes a uma circunferência, traçados por um ponto exterior a ela, são congruentes.

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \overline{OA} = \overline{OB} \\ \overline{OP} \text{ comum} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OAP \equiv \Delta OBP \text{ (caso especial de congruência de triângulos retângulos)} \Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$$

Exemplo: As circunferências da figura são tangentes externamente em T. As semirretas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência e a reta t é a tangente comum. Determine a medida do ângulo $A\hat{T}B$, sabendo que $A\hat{P}B = 80^\circ$.

RESOLUÇÃO:

Sejam $A\hat{P}T = 2\alpha$ e $B\hat{P}T = 2\beta$, então $A\hat{P}B = 2\alpha + 2\beta = 80° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 40°$.

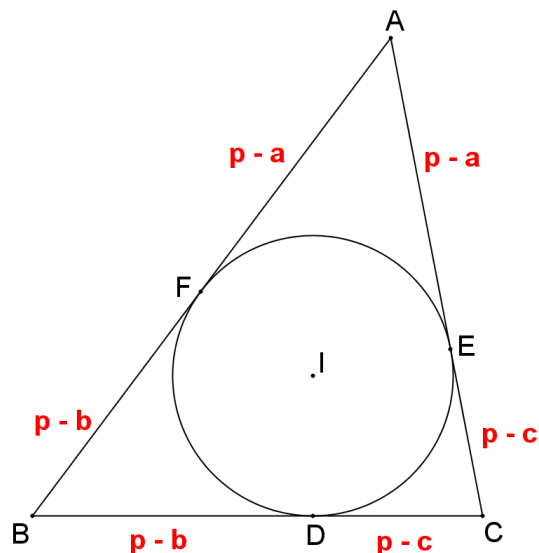
Sabemos que $\overline{PA} = \overline{PT} = \overline{PB}$, então os triângulos APT e BPT são isósceles. Assim, temos:

$P\hat{A}T = P\hat{T}A = 90° - \alpha$ e $P\hat{B}T = P\hat{T}B = 90° - \beta$.

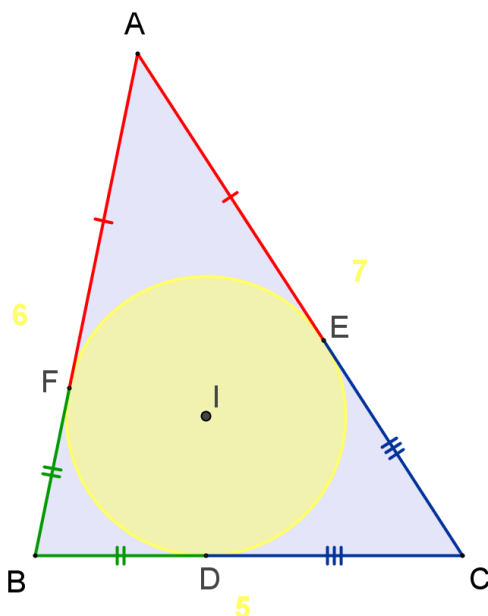
Portanto, $A\hat{T}B = P\hat{T}A + P\hat{T}B = (90° - \alpha + 90° - \beta) = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 40° = 140°$.

Segmentos determinados pelo círculo inscrito

Os segmentos determinados pelo círculo inscrito sobre os lados de um triângulo têm medidas iguais ao semiperímetro menos o lado oposto.

No triângulo ABC a seguir, temos: $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$, $\overline{AB}=c$ e $2p=a+b+c$. Os segmentos determinados pelo círculo inscrito sobre os lados são $\overline{AE}=\overline{AF}=p-a$, $\overline{BD}=\overline{BF}=p-b$ e $\overline{CD}=\overline{CE}=p-c$.

Demonstração:
Sejam $\overline{AF}=\overline{AE}=x$, $\overline{BD}=\overline{BF}=y$, $\overline{CD}=\overline{CE}=z$, então

$$\begin{cases}\overline{BC}=y+z=a\\ \overline{AC}=x+z=b\\ \overline{AB}=x+y=c\end{cases}\Rightarrow 2(x+y+z)=a+b+c=2p \Leftrightarrow x+y+z=p \Rightarrow \begin{cases}x=(x+y+z)-(y+z)=p-a\\ y=(x+y+z)-(x+z)=p-b\\ z=(x+y+z)-(x+y)=p-c\end{cases}$$

Exemplo: Seja um triângulo de lados 5, 6 e 7, calcule os comprimentos dos segmentos determinados pelo círculo inscrito ao triângulo sobre seus lados.
RESOLUÇÃO:

O semiperímetro do triângulo é $p = \frac{5+6+7}{2} = 9$.

As medidas dos segmentos determinados pelo círculo inscrito são

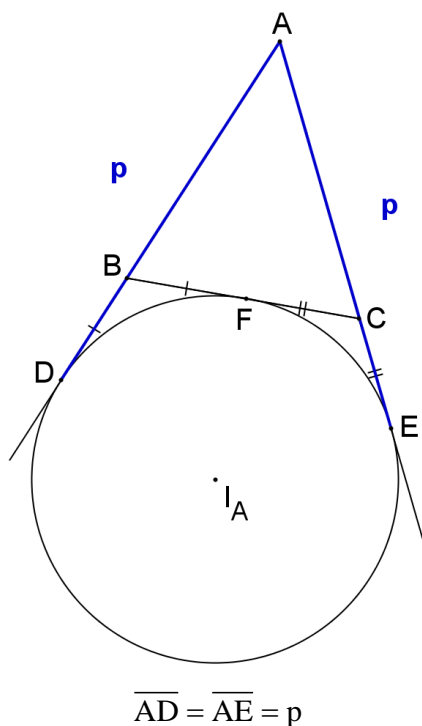
$\overline{AE} = \overline{AF} = p - a = 9 - 5 = 4$

$\overline{BD} = \overline{BF} = p - b = 9 - 7 = 2$

$\overline{CD} = \overline{CE} = 9 - 6 = 3$

Segmentos determinados pelo círculo ex-inscrito

A medida dos segmentos determinados por um círculo ex-inscrito sobre os prolongamentos dos lados adjacentes ao vértice oposto de um triângulo é igual ao semiperímetro do triângulo.

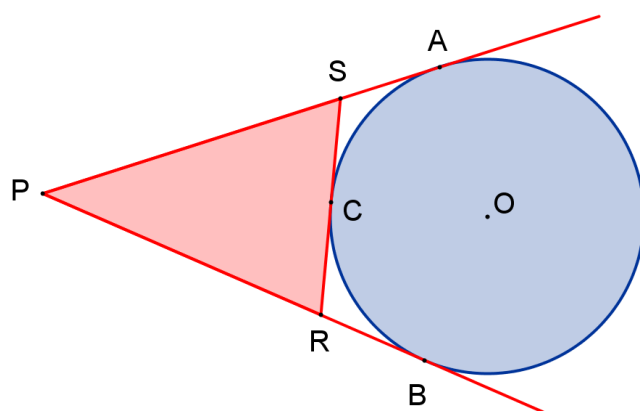
Seja $2p$ o perímetro do triângulo ABC a seguir:

$$\overline{AD} = \overline{AE} = p$$

Demonstração:

$$\left.\begin{matrix}\overline{BD} = \overline{BF} \\ \overline{CE} = \overline{CF}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{CF} = \overline{BD} + \overline{CE}$$

$$\overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AC} + \overline{CE} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2p$$

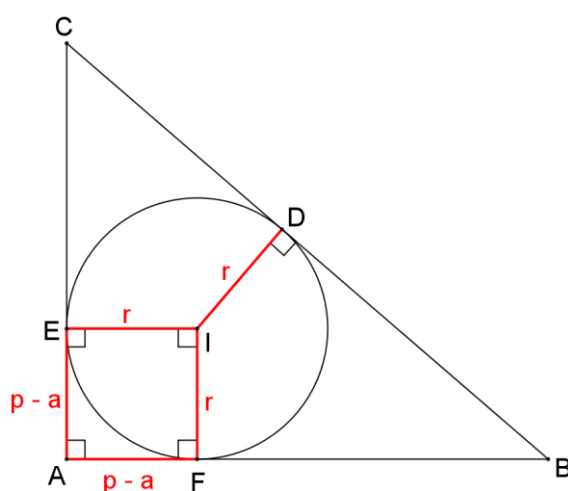
$$\overline{AD} = \overline{AE} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AE} = p$$

Exemplo: Calcule o perímetro do triângulo PRS da figura, sabendo que $\overline{PA} = 10 \text{ cm}$.

RESOLUÇÃO:

Sabemos que $\overline{PA} = \overline{PB} = 2p_{PRS} \Rightarrow 2p_{PRS} = 10 \text{ cm}$.

Raio dos círculos inscrito e ex-inscritos ao triângulo retângulo

O raio do círculo inscrito em um triângulo retângulo é igual ao semiperímetro menos a hipotenusa.

Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC} = a$ e semiperímetro p, então o raio do círculo inscrito é $r = p - a$.

$r = p - a$

Demonstração:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{IE} \perp \overline{AC} \wedge \overline{IF} \perp \overline{AB} \\ \overline{IE} = \overline{IF} = r \\ B\hat{A}C = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \#IEAF \text{ é um quadrado} \Rightarrow r = \overline{AE} = \overline{AF} = p - a$$

Exemplo: Calcule o perímetro de um triângulo retângulo de hipotenusa 5 cm e raio do círculo inscrito 1 cm.

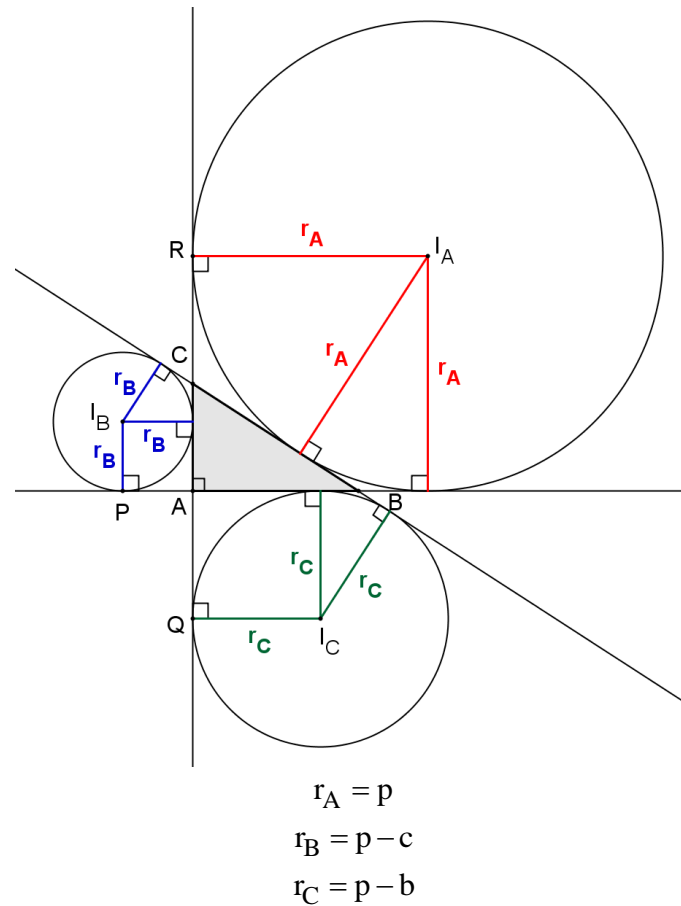
RESOLUÇÃO:

Sabemos que o raio r do círculo inscrito em um triângulo retângulo de semiperímetro p e hipotenusa a é dado por $r = p - a$.

Substituindo os valores dados no enunciado, temos: $1 = p - 5 \Leftrightarrow p = 6$.

Logo, o perímetro do triângulo retângulo é $2p = 2 \cdot 6 = 12\text{ cm}$.

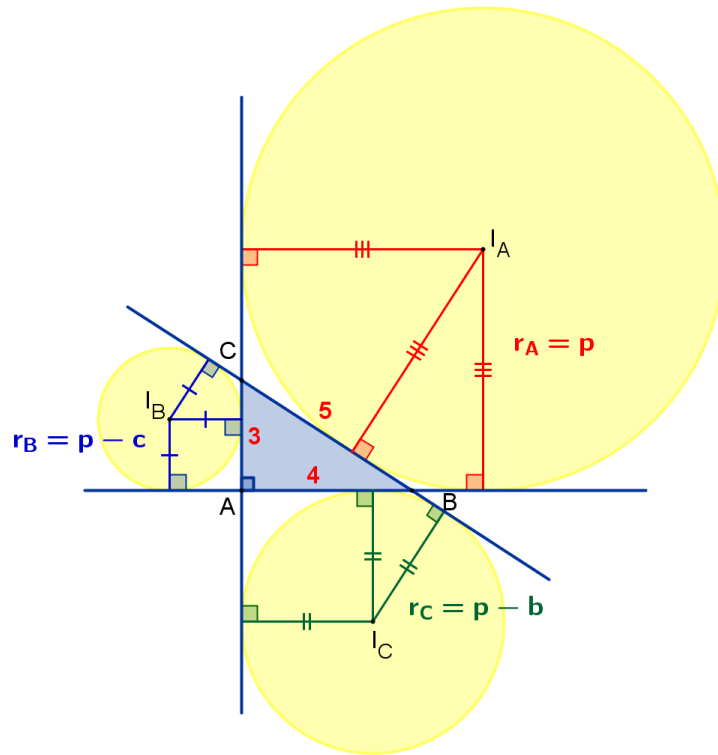
Seja um triângulo retângulo ABC de hipotenusa $\overline{BC} = a$, catetos $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, e perímetro $2p = a + b + c$, então os raios dos círculos ex-inscritos opostos aos vértices A, B e C, respectivamente, são dados por $r_A = p$, $r_B = p - c$ e $r_C = p - b$.

$$r_A = p$$
$$r_B = p - c$$
$$r_C = p - b$$

Demonstração:

$r_A = \overline{AR} = p$

$r_B = \overline{AP} = \overline{BP} - \overline{AB} = p - c$

$r_C = \overline{AQ} = \overline{CQ} - \overline{AC} = p - b$

Exemplo: Calcule os raios dos círculos ex-inscritos a um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.
RESOLUÇÃO:

O semiperímetro do triângulo retângulo é $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$.

Os raios dos círculos ex-inscritos são dados por:

$r_A = p = 6$

$r_B = p - c = 6 - 4 = 2$

$r_C = p - b = 6 - 3 = 3$

****

8)

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Observe o quadrado acima em que as letras representam números naturais distintos desde 1 até 9. Se a adição de três números de cada linha, de cada coluna ou de cada diagonal, desse quadrado, tem sempre o mesmo resultado, então a letra E representa o número:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Seja S a soma comum, então somando-se as três linhas temos:
$(A+B+C)+(D+E+F)+(G+H+I)=3S=1+2+3+\cdots+9=45 \Leftrightarrow S=15$.
Somando a coluna e as duas diagonais que contêm E, temos:
$(A+E+I)+(C+E+G)+(B+E+H)=3\cdot 15 \Leftrightarrow (A+B+C)+(G+H+I)+3E=45$
$\Leftrightarrow 2\cdot 15+3E=45 \Leftrightarrow E=5$.

9) Justapondo-se os números naturais conforme a representação abaixo, onde o sinal $*$ indica o último algarismo, forma-se um número de 1002 algarismos.

$$1234567891011121314151617181920 21\ldots *$$

O resto da divisão do número formado por 16 é igual a
(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8
(E) 10

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
De 1 a 9, escrevem-se $9\cdot 1=9$ algarismos.
De 10 a 99, escrevem-se $90\cdot 2=180$ algarismos.
Assim, faltam $1002-189=813$ algarismos.
De 100 a n, escrevem-se $(n-100+1)\cdot 3=813 \Leftrightarrow n=370$.
Logo, o número formado é $123456789101112131415161718192021\ldots 369370$.
O resto da divisão desse número por $16=2^4$ é igual ao resto da divisão por 16 do número formado pelos seus 4 últimos algarismos, ou seja, 9370. O resto de 9370 por 16 é 10.

10) Se $2x+y=1$, com x e y reais, então o maior valor da expressão $x^2+3xy+y^2$ é igual a
(A) $\frac{5}{4}$
(B) $\frac{7}{4}$
(C) $\frac{13}{8}$
(D) $\frac{17}{8}$
(E) $\frac{31}{16}$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:
$2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 2x$

$x^2 + 3xy + y^2 = x^2 + 3x(1-2x) + (1-2x)^2 = -x^2 - x + 1$

O vértice do trinômio $-x^2 - x + 1$ é um ponto de máximo, então o maior valor da expressão $x^2 + 3xy + y^2 = -x^2 - x + 1$ é a ordenada do vértice $\frac{-\left[(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1\right]}{4 \cdot (-1)} = \frac{5}{4}$.

Nessa questão utilizamos o seguinte conceito:
Em um trinômio do 2° grau $y = ax^2 + bx + c$, o vértice é um ponto de máximo se $a < 0$ e um ponto de mínimo se $a > 0$. Em ambos os casos as coordenadas do vértice são dadas por $x_V = \frac{-b}{2a}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$, onde o discriminante do trinômio é $\Delta = b^2 - 4ac$.

11) Considere um triângulo equilátero ABC, inscrito em um círculo de raio R. Os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios do arco menor AC e do segmento $\overline{BC}$. Se a reta MN também intercepta a circunferência desse círculo no ponto P, $P \neq M$, então o segmento $\overline{NP}$ mede

(A) $\frac{R\sqrt{7}}{2}$

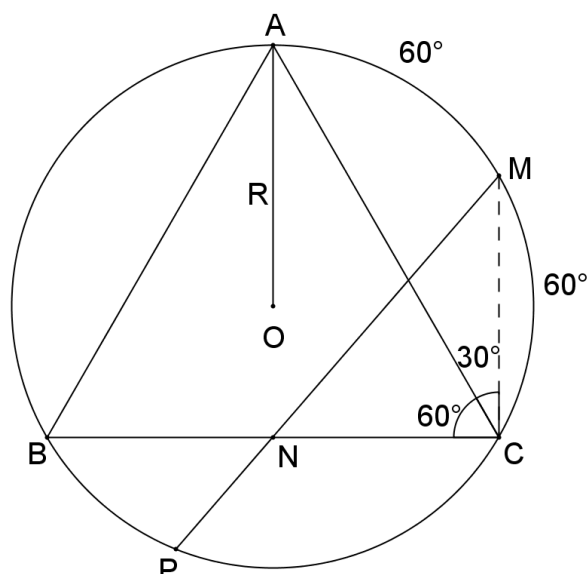
(B) $\frac{3R\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{3R\sqrt{7}}{14}$

(D) $\frac{R\sqrt{5}}{7}$

(E) $\frac{R\sqrt{5}}{3}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Os lados do triângulo equilátero ABC determinam arcos de 120° sobre o círculo circunscrito ao triângulo e medem $AB = AC = BC = R\sqrt{3}$.

Como M é o ponto médio do menor arco AC, então $AM = MC = 60^\circ$.

O segmento MC determinado pelo arco $MC = 60^\circ$ é o lado do hexágono inscrito no círculo, então $MC = R$.

O ângulo inscrito $A\hat{C}M = \frac{AM}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ e $A\hat{C}B = 60^\circ$, então $N\hat{C}M = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo MCN, temos:

$$MN^2 = MC^2 + NC^2 = R^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{7R^2}{4} \Leftrightarrow MN = \frac{R\sqrt{7}}{2}.$$

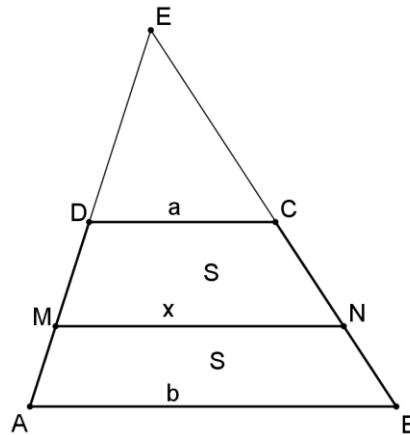
Considerando a potência do ponto N em relação ao círculo, temos:

$$MN \cdot NP = BN \cdot NC \Leftrightarrow \frac{R\sqrt{7}}{2} \cdot NP = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow NP = \frac{3\sqrt{7}R}{14}.$$

12) Em um trapézio, cujas bases medem a e b, os pontos M e N pertencem aos lados não paralelos. Se $\overline{MN}$ divide esse trapézio em dois outros trapézios equivalentes, então a medida do segmento $\overline{MN}$ corresponde a:

(A) média aritmética de a e b
(B) média geométrica das bases
(C) raiz quadrada da média aritmética de a^2 e b^2.
(D) raiz quadrada da média harmônica de a^2 e b^2.
(E) média harmônica de a e b

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Prolongam-se os lados não paralelos do trapézio até o ponto E.

$AB \| MN \| CD \Rightarrow \Delta EAB \sim \Delta EMN \sim \Delta EDC$

Como a razão entre as área de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, temos:

$$\frac{S_{EDC}}{a^2} = \frac{S_{EMN}}{x^2} = \frac{S_{EAB}}{b^2} = k$$

$$S_{ABNM} = S_{MNCD} \Leftrightarrow S_{EAB} - S_{EMN} = S_{EMN} - S_{EDC} \Leftrightarrow 2 \cdot S_{EMN} = S_{EAB} + S_{EDC}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot kx^2 = kb^2 + ka^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Logo, $\overline{MN} = x$ é a raiz quadrada da média aritmética de a^2 e b^2.

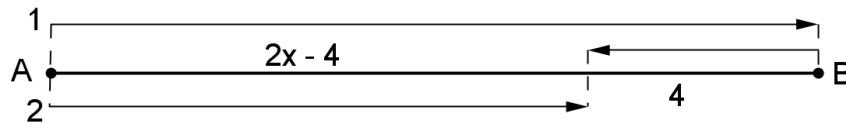
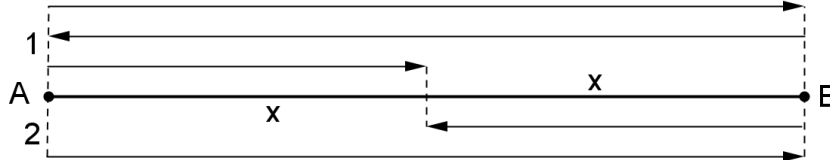
13) Dois ciclistas, com velocidades constantes, porém diferentes, deslocam-se em uma estrada retilínea que liga os pontos A e B. Partem de A no mesmo instante e quando alcançam B, retornam a A, perfazendo o movimento $A - B - A - B$, uma única vez. Quando o mais veloz alcança o ponto B, pela primeira vez, retorna no sentido de A encontrando o outro a 4 km de B. Quando o mais lento atinge o ponto B, retorna imediatamente e reencontra, no meio do percurso, o outro que está vindo de A. Desprezando-se o tempo gasto em cada mudança no sentido de percurso, a distância entre os pontos A e B, em km, é igual a

(A) 10
(B) 12
(C) 14
(D) 16
(E) 18

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Seja $2x \text{ km}$ a distância entre os pontos A e B, e denominemos 1 o ciclista mais veloz e 2 o ciclista mais lento e suas velocidades V_1 e V_2, respectivamente.

As figuras seguintes representam os dois encontros descritos no enunciado e as distâncias estão representadas em km.

A distância percorrida pelo ciclista 1 até o primeiro encontro é $2x+4$, enquanto a distância percorrida pelo ciclista 2 é $2x-4$. Como o tempo decorrido é o mesmo para os dois ciclistas, a razão entre as distâncias percorridas é igual à razão entre suas velocidades, isto é, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2x+4}{2x-4}$.

A distância percorrida pelo ciclista 1 até o segundo encontro é $2x+2x+x=5x$, enquanto a distância percorrida pelo ciclista 2 é $2x+x=3x$. Da mesma forma que no caso anterior, a razão entre as distâncias percorridas é igual à razão entre suas velocidades, isto é, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$.

Portanto, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2x+4}{2x-4}=\frac{5}{3}\Leftrightarrow 6x+12=10x-20\Leftrightarrow x=8\text{ km}$.

Logo, a distância entre as cidades A e B é $2x=16\text{ km}$.

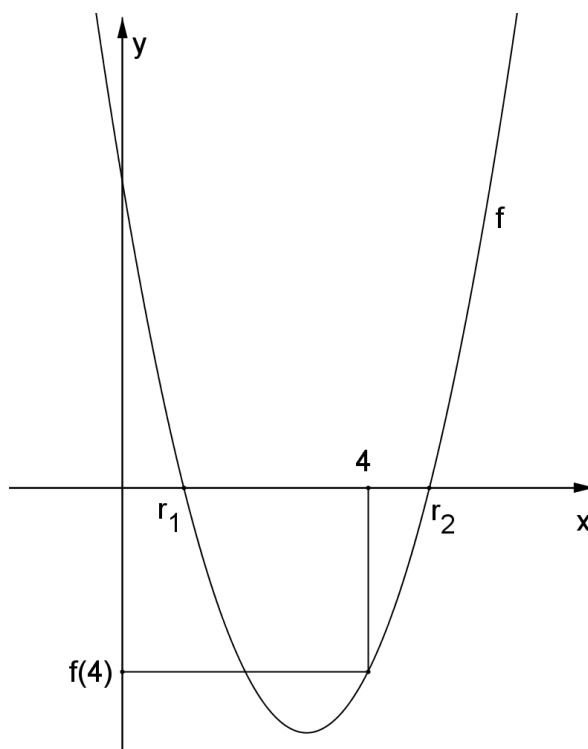
14) Considere a equação $x^2-6x+m^2-1=0$ com parâmetro m inteiro não nulo. Se essa equação tem duas raízes reais e distintas com o número 4 compreendido entre essas raízes, então o produto de todos os possíveis valores de m é igual a

(A) -2
(B) -1
(C) 2
(D) 4
(E) 6

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Para que a equação tenha duas raízes reais distintas, devemos ter $\Delta>0$.

$$\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot\left(m^2-1\right)>0\Leftrightarrow 40-4m^2>0\Leftrightarrow m^2-10<0\Leftrightarrow -\sqrt{10}<m<\sqrt{10}$$

Se o número 4 está compreendido entre as raízes, então $f(4)<0$, onde $f(x)=x^2-6x+m^2-1$ é uma função quadrática cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima, conforme ilustrado na figura a seguir:

Assim, $f(4) = 4^2 - 6 \cdot 4 + m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.
A interseção dos dois intervalos é $-3 < m < 3$. Logos, os valores inteiros não nulos de m são $-2, -1, 1$ e 2, cujo produto é $(-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 = 4$.

15) João vendeu dois carros de modelos SL e SR, sendo o preço de custo do primeiro 20% mais caro que o do segundo. Em cada carro teve um lucro de 20% sobre os seus respectivos preços de venda. Se o total dessa venda foi R$ 88.000,00, o preço de custo do segundo modelo era, em reais, igual a:
(A) 30.000,00
(B) 32.000,00
(C) 34.000,00
(D) 35.000,00
(E) 36.000,00

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:
Sejam $(PV)_1$, $(PC)_1$ e L_1, respectivamente, o preço de venda, o preço de custo e o lucro na venda do primeiro carro; e sejam $(PV)_2$, $(PC)_2$ e L_2, respectivamente, o preço de venda, o preço de custo e o lucro na venda do segundo carro.
Como o preço de custo do primeiro carro é 20% maior que o do segundo carro, então podemos dizer que $(PC)_2 = x$ e $(PC)_1 = (1 + 20\%) \cdot (PC)_2 = 1,2x$.
Como em cada carro o lucro obtido foi 20% do preço de venda, então $L_1 = 20\% \cdot (PV)_1 = 0,2(PV)_1$ e $L_2 = 20\% \cdot (PV)_2 = 0,2(PV)_2$.
Sabemos que o preço de venda é igual ao preço de custo mais o lucro, então

$(PC)_1 + L_1 = (PV)_1 \Leftrightarrow 1,2x + 0,2 \cdot (PV)_1 = (PV)_1 \Leftrightarrow 1,2x = 0,8 \cdot (PV)_1 \Leftrightarrow (PV)_1 = 1,5 \cdot x$

$(PC)_2 + L_2 = (PV)_2 \Leftrightarrow x + 0,2 \cdot (PV)_2 = (PV)_2 \Leftrightarrow x = 0,8 \cdot (PV)_2 \Leftrightarrow (PV)_2 = 1,25 \cdot x$

Como o total da venda foi R\$ 88.000,00 , então

$(PV)_1 + (PV)_2 = 88000 \Leftrightarrow 1,5 \cdot x + 1,25 \cdot x = 88000 \Leftrightarrow 2,75 \cdot x = 88000 \Leftrightarrow x = 32000$

Assim, o preço de custo do segundo modelo é $(PC)_2 = x = \text{R\$ } 32.000,00$.

16) Se x é um número inteiro tal que $\sqrt{2x^2 + 3x - 5} \le x + 1$, o número de elementos do conjunto solução dessa inequação é igual a:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 + 3x - 5 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\dfrac{5}{2} \text{ ou } x \ge 1 \\ x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x \ge 1$$

$$\sqrt{2x^2 + 3x - 5} \le x + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x^2 + 3x - 5}\right)^2 \le (x + 1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 \le x^2 + 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 2$$

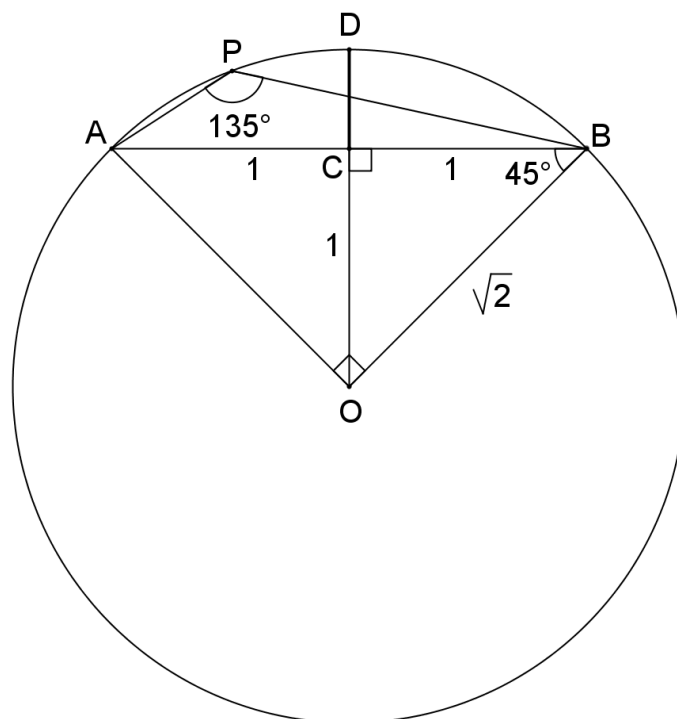
Como $x \ge 1$, então $1 \le x \le 2$, mas x é um número inteiro, portanto $S = \{1, 2\}$.

Assim, o número de elementos do conjunto solução da inequação é 2 .

17) Se um segmento $\overline{AB}$ tem 2 cm de comprimento, então a flecha do arco capaz de 135° desse segmento mede

(A) $\sqrt{2} + 1$
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{2} - 1$
(D) $\sqrt{3}$
(E) $2 - \sqrt{2}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Seja APB o arco capaz de 135° sobre $\overline{AB}$, então $APB = 360^\circ - 2\cdot 135^\circ = 90^\circ$.

Seja O o centro da circunferência que contém o arco APB, então $A\hat{O}B = 90^\circ$.

A flecha do arco capaz é o segmento $\overline{CD}$ sobre a perpendicular a $\overline{AB}$ por O, e entre o segmento $\overline{AB}$ e o arco capaz.

Como $OC \perp AB$, então C é ponto médio de $\overline{AB}$, o que implica $AC = CB = 1$.

O triângulo AOB é isósceles, pois $OA = OB$ são raios do círculo, então $A\hat{B}O = B\hat{A}O = 45^\circ$.

O triângulo retângulo BCO será então um triângulo retângulo isósceles, o que implica $OC = CB = 1$ e $OB = \sqrt{2}$.

Logo, a flecha do arco capaz é $CD = OD - OC = OB - OC = \left(\sqrt{2} - 1\right)\text{cm}$.

18) Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$.

O valor de $(a + b + c)$ é igual a:

(A) 11
(B) 12
(C) 13
(D) 14
(E) 15

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

$(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2 \Leftrightarrow (10a+b)^2 - (10b+a)^2 = (10c+c)^2$

$\Leftrightarrow 100a^2 + 20ab + b^2 - 100b^2 - 20ab - a^2 = 121c^2$

$\Leftrightarrow 99a^2 - 99b^2 = 121c^2 \Leftrightarrow 9(a+b)(a-b) = 11c^2$

$\Rightarrow 9 \mid c^2 \Rightarrow 3 \mid c \Rightarrow c \in \{3,6,9\}$

Vamos analisar cada um dos valores de c, lembrando que $(a+b)$ e $(a-b)$ possuem a mesma paridade.

$c = 3 \Rightarrow 9(a+b)(a-b) = 11 \cdot 9 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 11 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=11 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 6 \text{ e } b = 5$

Nesse caso, temos $65^2 - 56^2 = 33^2$ e $a+b+c = 6+5+3 = 14$.

$c = 6 \Rightarrow 9(a+b)(a-b) = 11 \cdot 36 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 44 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=22 \\ a-b=2 \end{cases}$

Esse caso não apresenta soluções, pois $a+b \le 17$.

$c = 9 \Rightarrow 9(a+b)(a-b) = 11 \cdot 81 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 99$

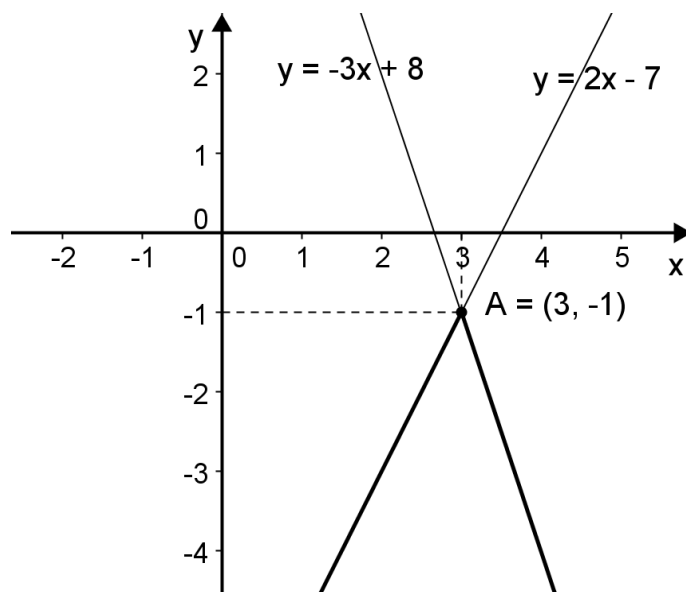
Esse caso também não apresenta solução, pois $a^2 - b^2 \le 9^2 - 1^2 = 80$.

Logo, a única solução é $65^2 - 56^2 = 33^2$ para a qual $a+b+c = 14$.

19) Se a e b são dois números reais, denotamos por $\min(a,b)$ o menor dos números a e b, isto é, $\min(a,b) = \begin{cases} a, & \text{se } a \le b \\ b, & \text{se } a \ge b \end{cases}$. O número de soluções inteiras negativas da inequação $\min(2x-7, 8-3x) > -3x+3$ é igual a:

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3
(E) 4

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Traçando o gráfico das funções $y = 2x - 7$ e $y = -3x + 8$, concluímos que

$$\min(2x-7, 8-3x) = \begin{cases} 2x-7, & \text{se } x < 3 \\ 8-3x, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

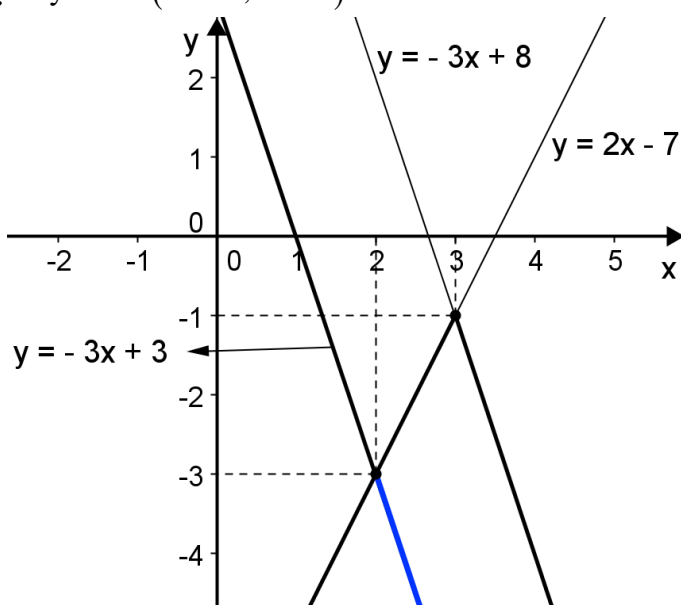
Vamos então resolver a inequação $\min(2x-7, 8-3x) > -3x+3$:

1° caso: $x < 3 \Rightarrow 2x - 7 > -3x + 3 \Leftrightarrow 5x > 10 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow S_1 =]2,3[$

2° caso: $x \geq 3 \Rightarrow 8 - 3x > -3x + 3 \Leftrightarrow 8 > 3 \Rightarrow S_2 = [3, +\infty[$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 =]2, +\infty[$

Logo, não há nenhuma solução inteira negativa.

Poderíamos resolver esse problema traçando no mesmo plano cartesiano o gráfico de $y = -3x + 3$ e comparando com a função $y = \min(2x-7, 8-3x)$.

Outra forma de resolver é utilizar a relação $\min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

$$\min(2x-7,8-3x)=\frac{(2x-7)+(8-3x)-|(2x-7)-(8-3x)|}{2}=\frac{-x+1-5|x-3|}{2}$$

$$\min(2x-7,8-3x)>-3x+3 \Leftrightarrow \frac{-x+1-5|x-3|}{2}>-3x+3 \Leftrightarrow |x-3|<x-1$$

$$x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ e } -(x-1)<x-3<x-1 \Leftrightarrow -x+1<x-3<x-1 \Leftrightarrow x>2$$

$$\Rightarrow S=]2,+\infty[$$

20) Considere os triângulos ABC e MNP. Se as medidas dos lados do segundo triangulo são, respectivamente, iguais às medidas das medianas do primeiro, então a razão da área de MNP para a área de ABC é igual a:

(A) $\frac{1}{3}$

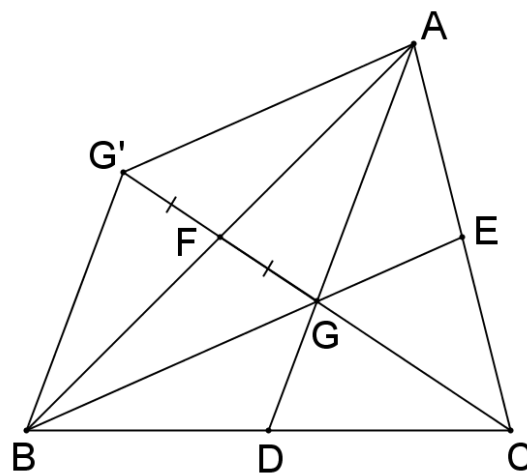
(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{4}$

(E) $\frac{5}{6}$

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:

Sejam AD, BE e CF as medianas do triângulo ABC e G o seu baricentro.

Sabe-se que: $\dfrac{AG}{GD}=\dfrac{BG}{GE}=\dfrac{CG}{GF}=2$.

Prolonga-se CF de forma que $FG'=FG$. Assim, $GG'=CG$.

Como F é médio de AB e de GG', o quadrilátero $BGAG'$ é um paralelogramo e $AG' = BG$.

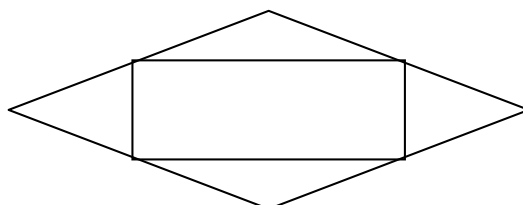
Dessa forma, o triângulo AGG' tem lados iguais a AG, BG e CG, ou seja, $\frac{2}{3}$ das medianas do ΔABC.

$$\Rightarrow \frac{S_{AGG'}}{S_{MNP}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow S_{AGG'} = \frac{4}{9} \cdot S_{MNP}$$

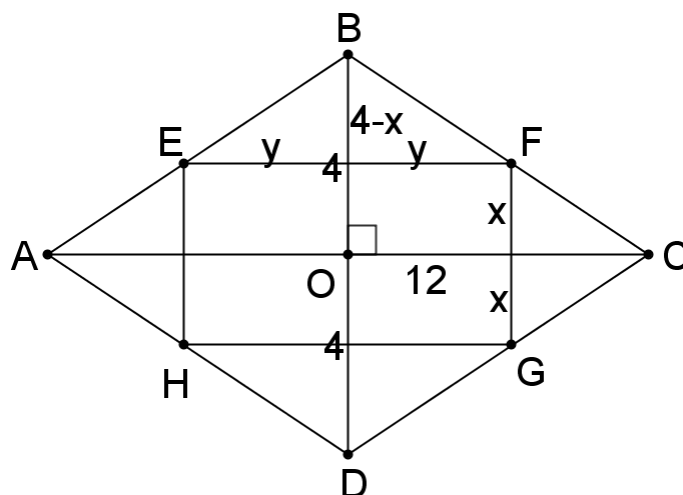
Como $S_{AFG} = S_{BFG} = S_{BDG} = S_{CDG} = S_{CEG} = S_{AEG} = \frac{S_{ABC}}{6}$ e $S_{AGG'} = 2 \cdot S_{AFG}$, então $S_{AGG'} = 2 \cdot \frac{S_{ABC}}{6} = \frac{S_{ABC}}{3}$.

Assim, $S_{AGG'} = \frac{4}{9} \cdot S_{MNP} = \frac{S_{ABC}}{3} \Leftrightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$

PROVA DE MATEMÁTICA – COLÉGIO NAVAL – 2001/2002

1) Considere um retângulo inscrito em um losango, conforme a figura abaixo. Se as diagonais do losango medem, respectivamente, 8 cm e 12 cm e a área do retângulo é 24 cm^2, então o perímetro deste retângulo, em cm, é igual a:

a) 28
b) 24
c) 22
d) 20
e) 18

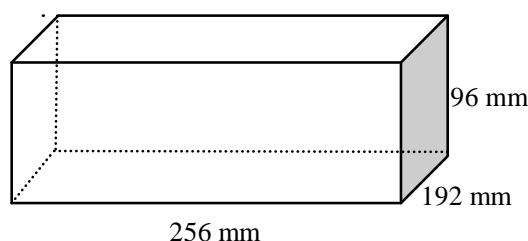
RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$S_{EFGH} = 24 \Leftrightarrow 2x \cdot 2y = 24 \Leftrightarrow xy = 6$

$\Delta ABC \sim \Delta EBF \Rightarrow \frac{4-x}{4} = \frac{2y}{12} \Leftrightarrow 3x + 2y = 12$

$\Rightarrow 3x + 2 \cdot \frac{6}{x} = 12 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ e } y = 3$

$2p_{EFGH} = 4(x+y) = 4(2+3) = 20\text{ cm}$

2) Um pedaço de doce de leite tem a forma de um paralelepípedo, com seis faces retangulares, como indica a figura abaixo. O doce deve ser dividido totalmente em cubos iguais, cada um com x mm de aresta. O maior valor inteiro de x é:

(A) 16
(B) 18
(C) 24
(D) 30
(E) 32

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
A aresta x do cubo deve ser um divisor de 256, 192 e 96. Portanto, o maior valor de x é o $\text{mdc}(256,192,96)$.
Como $256 = 2^8$, $192 = 2^6 \cdot 3$ e $96 = 2^5 \cdot 3$, então $x_{MAX} = \text{mdc}(256,192,96) = 2^5 = 32$ mm.

3) Marta comprou petecas, bolas e bonecas, pagando por cada unidade, respectivamente, R\$ 1,00, R\$ 10,00 e R\$ 20,00. Gastou R\$ 220,00 em um total de 101 unidades desses brinquedos. Quantas petecas ela comprou?
(A) 95
(B) 93
(C) 92
(D) 91
(E) 90

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:
Sejam x, y e z as quantidades de petecas, bolas e bonecas compradas, respectivamente, então

$$\begin{cases} 1\cdot x + 10\cdot y + 20\cdot z = 220 \\ x + y + z = 101 \end{cases}$$

$$x + 10y + 20z = 220 \Rightarrow (101 - y - z) + 10y + 20z = 220 \Leftrightarrow 9y + 19z = 119$$

$$9y + 19z = 119 \Rightarrow 19z \le 119 \Leftrightarrow z \le 6$$

$$9y + 19z = 119 \Leftrightarrow y = \frac{119 - 19z}{9} = 13 - 2z + \frac{2 - z}{9}$$

$0 \le z \le 6$ e $y = 13 - 2z + \frac{2-z}{9} \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = 2$ e $y = 9 \Rightarrow x = 90$

Logo, foram compradas 90 petecas.

4) O mínimo múltiplo comum entre dois números naturais a e b é 360 e $a \cdot b = 3600$. Qual o menor valor que $a + b$ pode assumir?

(A) 120

(B) 130

(C) 150

(D) 200

(E) 370

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$\text{mmc}(a,b) \cdot \text{mdc}(a,b) = a \cdot b \Rightarrow 360 \cdot \text{mdc}(a,b) = 3600 \Leftrightarrow \text{mdc}(a,b) = 10$

$\text{mdc}(a,b) = 10 \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*$ tais que $a = 10p, b = 10q$ e $\text{mdc}(p,q) = 1$

$a \cdot b = 3600 \Rightarrow 10p \cdot 10q = 3600 \Leftrightarrow p \cdot q = 36$

$\text{mdc}(p,q) = 1 \text{ e } p \cdot q = 36 \Rightarrow (p,q) \in \{(1,36);(4,9);(9,4);(36,1)\}$

O menor valor possível para a soma de a e b é $a + b = 10 \cdot 4 + 10 \cdot 9 = 130$.

5) Se $2 < x < 3$, então $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ é igual a:

(A) 2

(B) $\sqrt{x}$

(C) $2\sqrt{x-1}$

(D) $2\sqrt{x}$

(E) 3

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Condições de existência: $x - 1 \ge 0$, $x + 2\sqrt{x-1} \ge 0$ e $x - 2\sqrt{x-1} \ge 0$.

$2 < x < 3 \Rightarrow 1 < x - 1 < 2$

$x - 2\sqrt{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2 \ge 4(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \ge 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \ge 0$

$x + 2\sqrt{x-1} \ge x - 2\sqrt{x-1} \ge 0$

Vamos agora desenvolver a expressão: $y = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

$\Rightarrow y^2 = \left(\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}\right)^2 = x + 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + x - 2\sqrt{x-1} =$

$= 2x - 2\sqrt{\left(x + 2\sqrt{x-1}\right)\left(x - 2\sqrt{x-1}\right)} = 2x - 2\sqrt{x^2 - 4(x-1)} = 2x - 2\sqrt{x^2 - 4x + 4} =$

$= 2x - 2\sqrt{(x-2)^2} = 2x - 2|x-2|$

$2 < x < 3 \Leftrightarrow 0 < x - 2 < 1 \Rightarrow |x-2| = x - 2 \Rightarrow y^2 = 2x - 2\cdot(x-2) = 4$

Para $2 < x < 3$, temos $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} > \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \Rightarrow y > 0 \Rightarrow y = 2$.

Essa questão também pode ser resolvida da seguinte maneira:

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} = \left|\sqrt{x-1}+1\right| - \left|\sqrt{x-1}-1\right| =$

$= \left(\sqrt{x-1}+1\right) - \left(\sqrt{x-1}-1\right) = 2$

No desenvolvimento dos módulos usamos o seguinte raciocínio:

$2 < x < 3 \Leftrightarrow 1 < x-1 < 2 \Rightarrow 1 < \sqrt{x-1} < \sqrt{2} \Rightarrow 0 < \sqrt{x-1} - 1 < \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \left|\sqrt{x-1}-1\right| = \sqrt{x-1} - 1$

6) Se a e b são números naturais e $2a+b$ é divisível por 13, então um número múltiplo de 13 é:

(A) $91a+b$

(B) $92a+b$

(C) $93a+b$

(D) $94a+b$

(E) $95a+b$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

$13 | (2a+b) \Rightarrow 13 | \left((2a+b) + 13\cdot 7a\right) \Rightarrow 13 | (93a+b)$

7) Considere-se um soro glicosado a 5% quando para cada 100 ml de soro tem-se 5 ml de glicose. Com dois soros X e Y, respectivamente, glicosados a 5% e 23%, deseja-se obter 3 litros de uma mistura com 8% de glicose. Portanto, necessita-se, em litros, de um volume do soro X igual a:

(A) $2,5$

(B) $2,3$

(C) $2,1$

(D) $2,0$

(E) $1,8$

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

Sejam v o volume em ml de soro X e $(3000 - v)$ o volume em ml de soro Y.

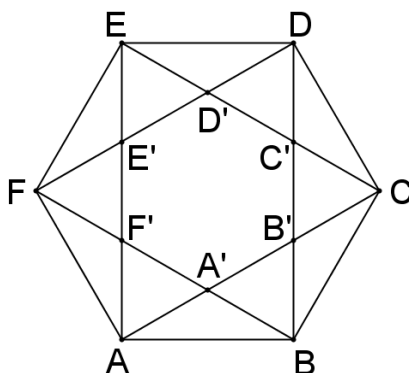
Em v ml de soro X, há $\frac{5}{100}v$ ml de glicose e, em $(3000 - v)$ ml de Y, há $\frac{23}{100}\cdot(3000-v)$ ml de glicose.

Como se deseja obter uma mistura com 8% de glicose, teremos

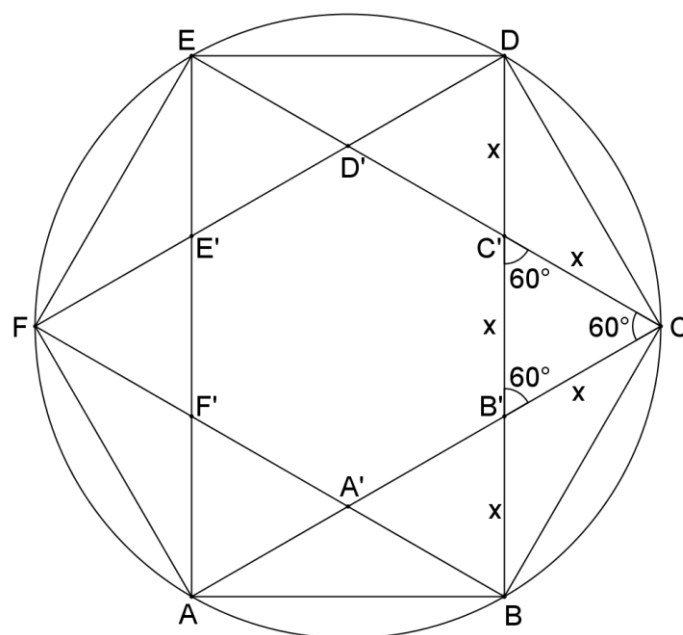
$\frac{5}{100}v + \frac{23}{100}\cdot(3000-v) = \frac{8}{100}\cdot 3000 \Leftrightarrow v = 2500\text{ ml} = 2,5\text{ litros}$.

Note que a concentração da mistura é a **média aritmética ponderada** das concentrações dos componentes, sendo os volumes dos componentes os pesos. Assim, o problema poderia ser resolvido diretamente como segue:

$$\frac{v \cdot 5\% + (3000 - v) \cdot 23\%}{v + (3000 - v)} = 8\% \Leftrightarrow v = 2500 \text{ ml} = 2,5 \ \ell .$$

8) As diagonais AC, BD, CE, DF, EA e FB de um hexágono regular $ABCDEF$ interceptam-se formando outro hexágono $A'B'C'D'E'F'$ conforme a figura abaixo. Qual a razão entre as áreas do maior e a do menor hexágono?

(A) $\sqrt{2}$
(B) $\sqrt{3}$
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 2
(E) 3

RESPOSTA: E

RESOLUÇÃO:

Seja o hexágono $ABCDEF$ inscrito em uma circunferência de raio R, então o lado do hexágono é igual a R.

Os triângulos $AA'F'$, $BA'B'$, $CB'C'$, $DC'D'$, $ED'E'$, $FE'F'$ são triângulos equiláteros congruentes. Logo, $BB' = B'C' = C'D$.

A corda BD é o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência de raio R, então $BD = 3x = R\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ e o lado do hexágono regular $A'B'C'D'E'F'$ é igual a $\frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Os dois hexágonos regulares são polígonos semelhantes, portanto a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Assim, temos:

$$\frac{S_{ABCDEF}}{S_{A'B'C'D'E'F'}} = \left(\frac{R}{R\sqrt{3}/3}\right)^2 = 3.$$

9) Se os números x, y e z são respectivamente, iguais às médias aritmética, geométrica e harmônica de dois números reais positivos, então:

(A) $xz = 1$

(B) $xz = y$

(C) $xz = y^2$

(D) $y^2 + z^2 = x^2$

(E) $(y + z)^2 = x^2$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, então $x = \dfrac{a+b}{2}$, $y = \sqrt{a \cdot b}$ e $z = \dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \dfrac{2ab}{a+b}$. Assim, temos:

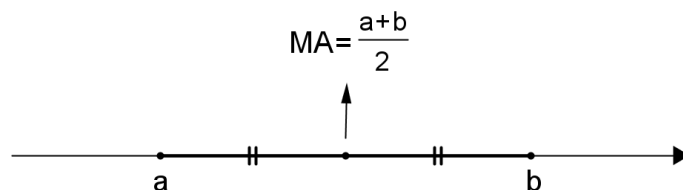
$$z = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2y^2}{2x} \Leftrightarrow y^2 = x \cdot z .$$

NOTA 6: MÉDIAS

Média aritmética simples (MA)

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais, define-se a **média aritmética** (MA) desses n números como o quociente entre a soma desses números pela quantidade n de números.

$$MA = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$$

Na reta real, a média aritmética de dois números representa o ponto médio do segmento de reta que une os dois números.

Sejam dois números a e b tais que $a \le b$ e seja MA a média aritmética desses dois números, então $a \le MA \le b$.

Em geral, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais e MA é a sua média aritmética, então

$$\text{mín}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \le MA \le \text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

A soma das diferenças entre os números e sua média aritmética é zero. Assim, se MA é a sua média aritmética dos números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então $\sum_{i=1}^{n} (a_i - MA) = 0$.

Média aritmética ponderada (MP)

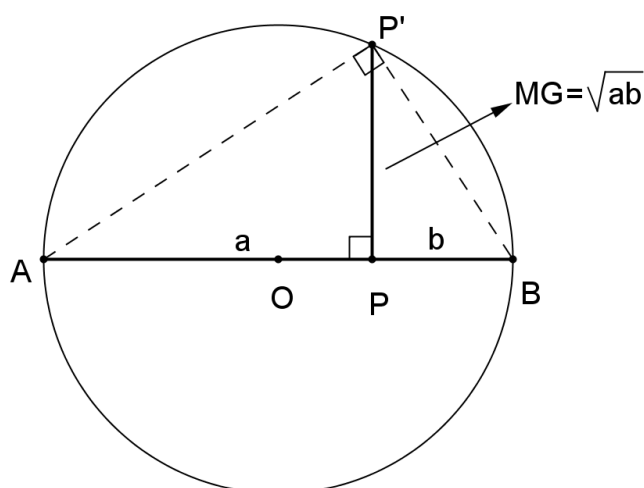
A média aritmética ponderada dos números x_1 com peso p_1, x_2 com peso p_2, ..., x_n com peso p_n é dada por:

$$MP = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Média geométrica ou proporcional (MG)

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos, define-se a **média geométrica** (MG) ou **média proporcional** desses n números como a raiz n-ésima do produto desses números.

$$MG = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

Graficamente, a média geométrica de dois números positivos é igual semicorda perpendicular ao diâmetro no ponto que divide o diâmetro em partes iguais a a e b de uma circunferência de diâmetro $a+b$.

Sejam dois números positivos a e b tais que $a \le b$ e seja MG a média geométrica desses dois números, então $a \le MG \le b$.

Em geral, se $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais positivos e MG é a sua média geométrica, então

$$\text{mín}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \le MG \le \text{máx}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Média harmônica (MH)

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais, define-se a **média harmônica** (MH) desses n números como o inverso da média aritmética dos inversos desses números.

$$MH = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}{n} \right)^{-1} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

Para dois números, a expressão da média harmônica é da forma $MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$ e, para três números, é da forma $MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{3}} = \frac{3abc}{ab+ac+bc}$.

Observe ainda que, para dois números, vale a relação

$$MA \cdot MH = (MG)^2$$

Exemplo 1: Calcule a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica dos números 2 e 3.

$MA = \frac{2+3}{2} = 2,5$

$MG = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6} \approx 2,45$

$MH = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2+3} = 2,4$

Exemplo 2: Calcule a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica dos números 2, 3 e 5.

$MA = \frac{2+3+5}{3} = 3,333...$

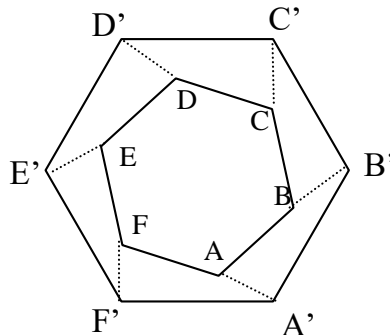
$MG = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 5} = \sqrt[3]{30} \approx 3,11$

$MH = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5} \approx 2,9$

Exemplo 3: Calcule a média aritmética ponderada dos números 1, 2 e 3, sendo os pesos 3, 2 e 1, respectivamente.

$MP = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{1+2+3} \approx 1,67$

****

10) Observe a figura abaixo, onde os seis lados do hexágono regular $ABCDEF$ foram prolongados de segmentos $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'$, de modo que a medida do segmento AA' corresponde a $P\%$ da medida do lado AB, $(P > 0)$. Se o percentual de aumento que a área do hexágono $A'B'C'D'E'F'$ apresenta em relação à área do hexágono original é 75%, então o valor de P é:

(A) 25
(B) 30
(C) 45
(D) 50
(E) 75

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
Seja x o lado do hexágono regular ABCDEF, então

$$AB' = AB + BB' = x + \frac{P}{100}x = \left(1 + \frac{P}{100}\right)x$$

$$AA' = \frac{P}{100}x$$

$$B'\hat{A}A' = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $A'AB'$, temos:

$$(A'B')^2 = (1 + P\%)^2 x^2 + (P\%)^2 x^2 - 2 \cdot (1 + P\%) x \cdot (P\%) x \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= x^2 \left(1 + 2(P\%) + (P\%)^2 + (P\%)^2 - 2 \cdot (1 + P\%) \cdot (P\%) \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= x^2 \left(1 + 2(P\%) + 2(P\%)^2 - (P\%) - (P\%)^2\right) = x^2 \left(1 + (P\%) + (P\%)^2\right)$$

Como os hexágonos regulares $A'B'C'D'E'F'$ e $ABCDEF$ são polígonos semelhantes, então

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'F'}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{A'B'}{AB}\right)^2 = 1,75 \Rightarrow \frac{x^2\left(1 + (P\%) + (P\%)^2\right)}{x^2} = 1,75$$

$$\Leftrightarrow (P\%)^2 + (P\%) - 0,75 = 0 \Leftrightarrow (P\%) = -\frac{3}{2} \text{ ou } (P\%) = \frac{1}{2}$$

$$P > 0 \Rightarrow P\% = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P}{100} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P = 50$$

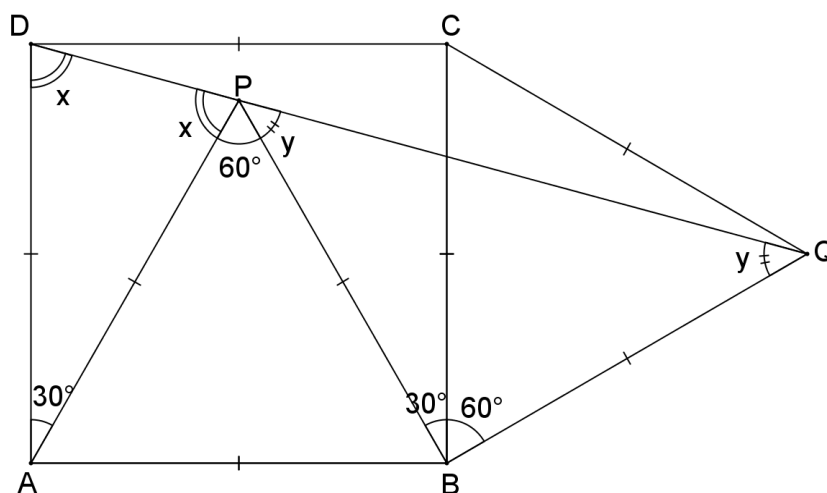
11) Se a é um número natural, $a^5 - 5a^3 + 4a$ é sempre divisível por:
(A) 41
(B) 48
(C) 50
(D) 60
(E) 72

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
$a^5 - 5a^3 + 4a = a\left(a^4 - 5a^2 + 4\right) = a\left(a^2 - 4\right)\left(a^2 - 1\right) = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$
Como $a \in \mathbb{N}$, então a expressão do enunciado é o produto de cinco números naturais consecutivos o que implica que há pelo menos um múltiplo de 5, um múltiplo de 4, um múltiplo de 3 e um múltiplo de 2 não múltiplo de 4. Portanto, a expressão é sempre múltipla de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ e, consequentemente, sempre divisível por 60.

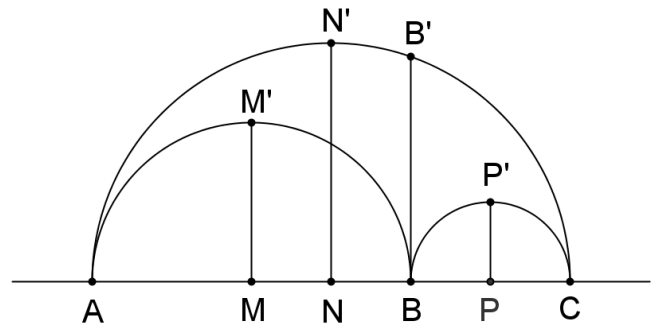
12) Considere um quadrado $ABCD$ e dois triângulos equiláteros ABP e BCQ, respectivamente, interno e externo ao quadrado. A soma das medidas dos ângulos $A\hat{D}P$, $B\hat{Q}P$ e $D\hat{P}Q$ é igual a:
(A) 270º
(B) 300º
(C) 330º
(D) 360º
(E) 390º

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$D\hat{A}P = D\hat{A}B - P\hat{A}B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$
ΔADP é isósceles $\Rightarrow x + x + 30^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow x = 75^\circ$
$P\hat{B}Q = P\hat{B}C + C\hat{B}Q = \left(A\hat{B}C - A\hat{B}P\right) + C\hat{B}Q = \left(90^\circ - 60^\circ\right) + 60^\circ = 90^\circ$

ΔBPQ é isósceles $\Rightarrow y+y+90^\circ=180^\circ \Leftrightarrow y=45^\circ$

$\Rightarrow A\hat{D}P+B\hat{Q}P+D\hat{P}Q=x+y+\left(x+60^\circ+y\right)=2\left(x+y\right)+60^\circ=2\cdot\left(75^\circ+45^\circ\right)+60^\circ=300^\circ$

13) Observe a figura abaixo que representa três semicircunferências de centros M, N e P, tangentes duas a duas, respectivamente, nos pontos A, B e C. Os segmentos MM', NN', BB' e PP' são perpendiculares à reta r. Se a medida do segmento BB' é 6 cm, a área do triângulo $M'N'P'$ em cm^2, é igual a:

(A) 9
(B) 10
(C) 12
(D) 18
(E) 36

RESPOSTA: A

RESOLUÇÃO:

$S_{M'N'P'}=S_{MM'N'N}+S_{PP'N'N}-S_{MM'P'P}$

Seja r o raio da circunferência de centro N, a o centro da circunferência de centro M e b o centro da circunferência de centro P.

$\Rightarrow 2r=2a+2b \Leftrightarrow r=a+b$

$$S_{MM'N'N}=\frac{(MM'+NN')\cdot MN}{2}=\frac{(r+a)(r-a)}{2}=\frac{(a+b+a)(a+b-a)}{2}=\frac{(2a+b)b}{2}$$

$$S_{PP'N'N}=\frac{(NN'+PP')\cdot NP}{2}=\frac{(r+b)(r-b)}{2}=\frac{(a+b+b)(a+b-b)}{2}=\frac{(a+2b)a}{2}$$

$$S_{MM'P'P}=\frac{(MM'+PP')MP}{2}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}=\frac{(a+b)^2}{2}$$

$$S_{M'N'P'}=\frac{(2a+b)b}{2}+\frac{(a+2b)a}{2}-\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{2ab+b^2+a^2+2ab-a^2-b^2-2ab}{2}=ab$$

O triângulo $AB'C$ é retângulo em B' e BB' é a altura relativa à hipotenusa, então $(BB')^2=AB\cdot BC \Rightarrow 6^2=2a\cdot 2b \Leftrightarrow ab=9 \Rightarrow S_{M'N'P'}=ab=9\text{ cm}^2$.

14) Um torneio de judô é disputado por 10 atletas e deve ter apenas um campeão. Em cada luta não pode haver empate e aquele que perder três vezes deve ser eliminado da competição. Qual o número máximo de lutas necessário para se conhecer o campeão?
(A) 27
(B) 28
(C) 29
(D) 30
(E) 31

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Em cada luta é computada uma vitória e uma derrota. O número máximo de lutas necessário para se conhecer o campeão ocorre quando 9 atletas tiverem perdido três vezes e o atleta campeão tiver perdido duas vezes. Isso resulta em um total de $9 \cdot 3 + 2 = 29$ derrotas, ou seja, 29 lutas.
Vamos mostrar um caso em que essa quantidade de lutas ocorre: 8 dos 10 atletas lutam três vezes contra um dos outros dois atletas, perdem as três lutas e são eliminados, totalizando 24 lutas; os 2 atletas restantes disputam 5 lutas entre si, um deles vence as duas primeiras, outro as duas seguintes e o vencedor da quinta luta é o campeão, perfazendo um total de $24 + 5 = 29$ lutas.

15) A soma de dois números reais distintos é igual ao produto desses números. O menor valor natural desse produto é igual a:
(A) 8
(B) 7
(C) 6
(D) 5
(E) 4

RESPOSTA: D

RESOLUÇÃO:
$$P = xy \Rightarrow y = \frac{P}{x}$$
$$x + y = xy \Rightarrow x + \frac{P}{x} = P \Leftrightarrow x^2 - Px + P = 0$$
$$\Delta > 0 \Rightarrow (-P)^2 - 4 \cdot 1 \cdot P > 0 \Leftrightarrow P^2 - 4P > 0 \Leftrightarrow P < 0 \text{ ou } P > 4$$
Logo, o menor valor natural que P pode assumir é 5.

16) As dimensões de um retângulo são, em metros, indicadas por x e y. Sua área aumenta $52\ m^2$ quando se acrescenta $2\ m$ a x e $4\ m$ a y. Sua superfície diminui $52\ m^2$ quando se subtrai $2\ m$ de x e $8\ m$ de y. Qual o valor de x?

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

$S = x \cdot y$

$S + 52 = (x+2)\cdot(y+4) \Rightarrow xy + 52 = xy + 4x + 2y + 8 \Leftrightarrow 2x + y = 22$

$S - 52 = (x-2)\cdot(y-8) \Rightarrow xy - 52 = xy - 8x - 2y + 16 \Leftrightarrow 4x + y = 34$

$\Rightarrow (4x+y)-(2x+y) = 34 - 22 \Leftrightarrow 2x = 12 \Leftrightarrow x = 6\ m$

17) O conjunto solução da equação $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}} = 1$ é igual a:

(A) $\varnothing$
(B) $\mathbb{R}$
(C) $\mathbb{R} - \{-1,\ 0,\ 1\}$
(D) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
(E) $\{0\}$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:

Condição de existência: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ e $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

$$\frac{\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2}{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\dfrac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{(x+1)(x-1)}}{\dfrac{2(x-1)+2(x+1)}{(x+1)(x-1)}} = 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{4x} = 1 \ \wedge\ x \neq \pm 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \ \wedge\ x \neq \pm 1 \ \wedge\ x \neq 0$$

$\Leftrightarrow S = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

18) Quatro corredores, João, Pedro, André, e Fábio combinaram que, ao final de cada corrida, o que ficasse em último lugar dobraria o dinheiro que cada um dos outros possuía. Competiram 4 vezes e ficaram em último lugar na $1^{\underline{a}}$, $2^{\underline{a}}$, $3^{\underline{a}}$ e $4^{\underline{a}}$ corridas respectivamente, João, Pedro, André, e Fábio. Se no final da $4^{\underline{a}}$ competição, cada um ficou com R\$ 16,00, então, inicialmente João possuía:

(A) R\$ 5,00
(B) R\$ 9,00
(C) R\$ 16,00
(D) R\$ 17,00
(E) R\$ 33,00

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Cada vez que um dos competidores não é o último tem seu dinheiro dobrado.
No final da 4^a corrida João possuía $R\$16,00$.
Como João não foi o último na 4^a corrida, então ele possuía $R\$\,8,00$ antes dessa corrida.
Como João não foi o último da 3^a corrida, então ele possuía $R\$\,4,00$ antes dessa corrida.
Como João não foi o último da 2^a corrida, então ele possuía $R\$\,2,00$ antes dessa corrida.
João foi o último da 1^a corrida, então ele dobrou a quantia dos outros competidores e restaram a ele $R\$\,2,00$.
O dinheiro total é $4 \cdot 16 = R\$\,64,00$, então João possuía $R\$\,33,00$ e ou outros três juntos $R\$\,31,00$.

19) A equação $x^4 - (a-6)x^2 + (9-a) = 0$, na variável x, tem quatro raízes reais e distintas, se e somente se:

(A) $a > 8$
(B) $6 < a < 8$
(C) $8 < a < 9$
(D) $6 < a < 9$
(E) $a > 9$

RESPOSTA: C

RESOLUÇÃO:
Seja $x^2 = y$, temos

$$x^4 - (a-6)x^2 + (9-a) = 0 \Rightarrow y^2 - (a-6)y + (9-a) = 0$$

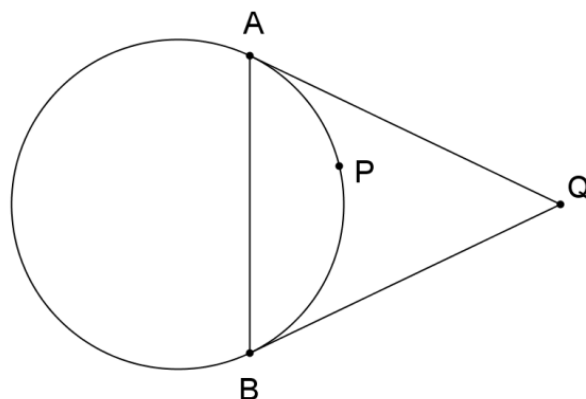
Para que a equação biquadrada tenha 4 raízes reais distintas, a equação do 2° grau em y deve ter duas raízes reais distintas e positivas, o que ocorre quando $\Delta > 0$, e a soma e o produto das raízes são positivos.

$$\Delta = [-(a-6)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9-a) > 0 \Leftrightarrow a^2 - 12a + 36 - 36 + 4a > 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a > 0 \Leftrightarrow a < 0 \text{ ou } a > 8$$

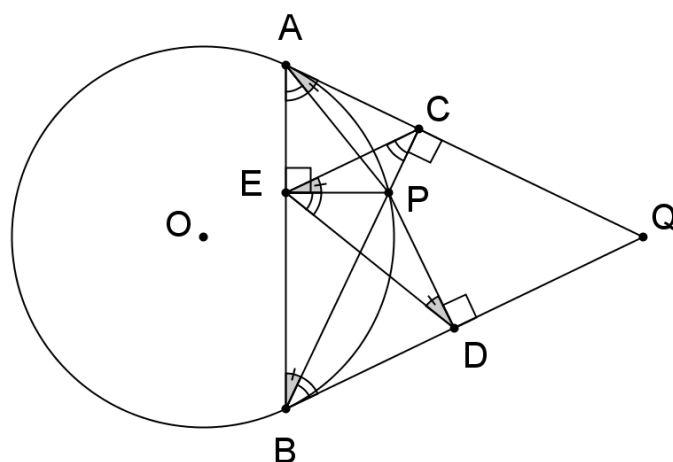
$$S = \frac{-[-(a-6)]}{1} > 0 \Leftrightarrow a - 6 > 0 \Leftrightarrow a > 6$$

$P = \frac{9-a}{1} > 0 \Leftrightarrow a < 9$

Efetuando a interseção dos três intervalos, temos $8 < a < 9$.

20) Na figura abaixo, o ponto P do menor arco AB dista 6 cm e 10 cm, respectivamente, das tangentes AQ e BQ. A distância, em cm, do ponto P à corda AB é igual a:

(A) $\sqrt{30}$
(B) $2\sqrt{15}$
(C) 16
(D) 18
(E) $6\sqrt{10}$

RESPOSTA: B

RESOLUÇÃO:

Sejam PC, PD e PE as perpendiculares a AQ, BQ e AB, respectivamente.
Traçam-se PA, PB, EC e ED.

$A\hat{C}P + A\hat{E}P = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \# ACPE$ é inscritível

$B\hat{D}P + B\hat{E}P = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \# BDPE$ é inscritível

$\Rightarrow C\hat{E}P = C\hat{A}P = \frac{AP}{2} = A\hat{B}P = E\hat{D}P$

$\Rightarrow D\hat{E}P = D\hat{B}P = \frac{BP}{2} = B\hat{A}P = E\hat{C}P$

$C\hat{E}P = E\hat{D}P$ e $E\hat{C}P = D\hat{E}P \Rightarrow \Delta CEP \sim \Delta EDP \Rightarrow \frac{PE}{PD} = \frac{PC}{PE} \Leftrightarrow PE^2 = PC \cdot PD$

Nesse caso, temos $PC = 6$ cm e $PD = 10$ cm, logo $PE^2 = 6 \cdot 10 \Leftrightarrow PE = 2\sqrt{15}$ cm.

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo do lançamento dos próximos volumes da coleção X-MAT!

Volumes já lançados:

Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2011-2015
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2015
Livro X-MAT Volume 3 EFOMM 2009-2015
Livro X-MAT Volume 4 ESCOLA NAVAL 2010-2015
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016